Problema 960

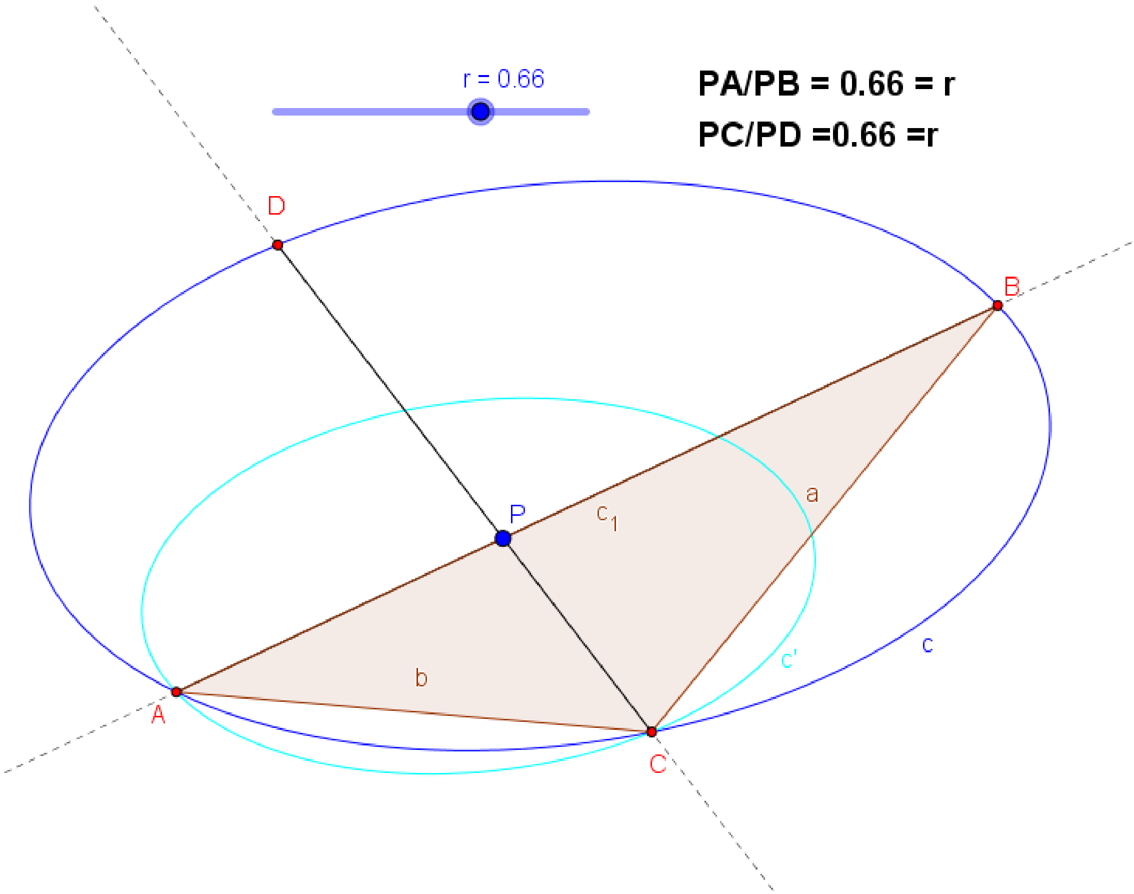
Sea c una cónica, P un punto no perteneciente a ella y r un número entre 0 y 1. Hallar un triángulo ABC inscrito en c de forma que su lado AB contenga a P, sea PA/PB = r y la cuerda CD de c que determina la recta CP sea tal que PC/PD =r. ¿Para qué valores de r no existe ABC en las condiciones indicadas?

Solución (Por Antonio Casas)

Cualquier homotecia de centro **P** y razón **k** transforma un punto **X** del plano en otro **X’** de forma que **PX’/PX=k** y además **P, X, X’** están alineados.

La homotética de la cónica **c** de centro **P** y razón **r**, es otra cónica **c’** de la misma clase que **c.** Los puntos de corte de **c** y **c’** (si están en el plano real) generan cuerdas con la razón **r**.

Lo mismo ocurre con la razón **-r** lo que añade una nueva posibilidad de encontrar puntos de intersección de **c** y **c’**



La discusión sobre existencia de solución según el tipo de cónica dado, la posición de **P** y el valor mínimo de **r** para que haya solución, es fácil seguirla observando los casos en que una cónica **c** y su homotética **c’** se cortan (siempre lo harán, pero tal vez no sean puntos reales o diferentes)

Por ejemplo, para ver el mínimo de **r** podemos determinar cuando una cónica y su homotética son tangentes.