TRIÁNGULOS CABRI

Problema 960. (propuesto por Antonio Casas Pérez) Sean $\mathcal{C}$ una cónica, P un punto no perteneciente a ella y $\rho \in (0,1)$. Hallar un triángulo ABC inscrito en $\mathcal{C}$ de forma que su lado AB contenga a P, siendo $\frac{AP}{BP} = \rho$, y la cuerda CD de $\mathcal{C}$ que determina la recta CP sea tal que $\frac{CP}{DP} = \rho$. ¿ Para qué valores de $\rho \in (0,1)$ no existe el triángulo ABC en las condiciones indicadas ?.

Solución:

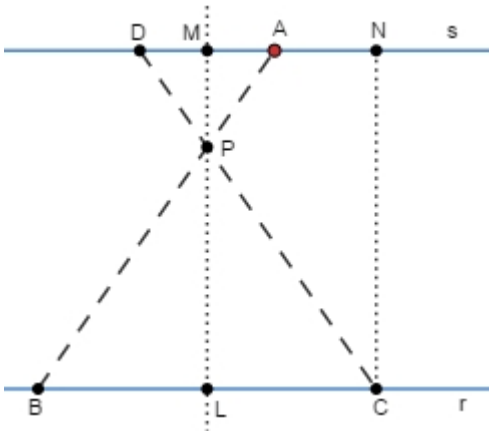
Si $\mathcal{C}$ fuese una recta doble, no podría inscribirse ningún triángulo en ella, por lo que vamos a distinguir cinco casos:

① Si $\mathcal{C}$ es un par de rectas paralelas r y s separadas por una distancia d, tomaremos dos puntos B y C situados sobre la recta r y separados por una distancia d. A continuación, tomaremos el punto medio L del segmento BC, el punto M de intersección entre la recta mediatriz del segmento BC y la recta s y el punto N de la recta s tal que el triángulo NBC es rectángulo en C. Para cada punto A situado en el segmento MN, la recta BA corta a la recta mediatriz del segmento BC en el punto P, de forma que los triángulos AMP y BLP son semejantes, por lo que:

$$\rho = \frac{AP}{BP} = \frac{AM}{BL} = \frac{2AM}{d}$$

y, por tanto, para cada $\rho \in (0,1)$, tomando $AM = \frac{\rho d}{2}$, el triángulo ABC verifica las condiciones del enunciado, siendo D el punto de intersección entre la recta s y la recta CP, ya que, como el trapecio $ADBC$ es isósceles, entonces:

$$\frac{DP}{CP} = \frac{AP}{BP} = \rho$$



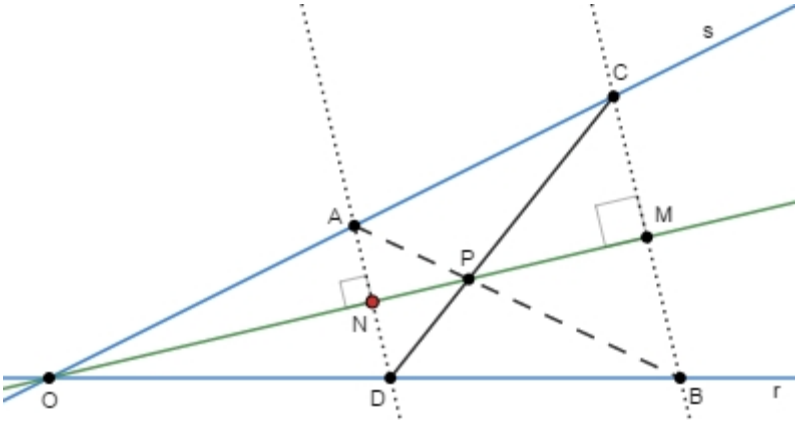
② Si $\mathcal{C}$ es un par de rectas secantes r y s que se cortan en un punto O, tomaremos un punto cualquiera M situado sobre la bisectriz del menor de los ángulos que determinan ambas rectas y los puntos B y C de intersección entre la recta perpendicular a dicha bisectriz pasando por el punto M y las rectas r y s, respectivamente. Para cada punto N situado en el segmento OM, la recta paralela a BC pasando por N corta a las rectas r y s en los puntos D y A, respectivamente, y llamaremos P al punto de intersección entre las rectas BA y CD, de forma que los triángulos PAD y PBC son semejantes y los triángulos ODA y OBC son semejantes, por lo que:

$$\rho = \frac{AP}{BP} \underset{PAD\sim PBC}{=} \frac{AD}{BC} \underset{ODA\sim OBC}{=} \frac{ON}{OM}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

y, por tanto, para cada $\rho \in (0,1)$, tomando $ON = \rho OM$, el triángulo ABC verifica las condiciones del enunciado, ya que, como el trapecio $ADBC$ es isósceles, entonces:

$$\frac{DP}{CP} = \frac{AP}{BP} = \rho$$



③ Si $\mathcal{C}$ es una elipse con semiejes a y b, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el centro O de la elipse y eje de abscisas en el eje focal de ésta, tomando como unidad de medida la longitud b de su semieje menor y llamando $u = \frac{a}{b}$, resulta que su ecuación es:

$$x^2 + u^2 y^2 = u^2$$

por lo que, llamando $B = (0,-1)$ y C a los extremos del eje menor de la elipse y M y $N = (u,0)$ a los extremos de su eje mayor, para cada punto $P = (p,0)\ (0 < p < u)$ situado en el segmento ON, la recta:

$$BP \equiv x - py - p = 0$$

corta a la elipe en un segundo punto:

$$A = \left(\frac{2pu^2}{u^2 + p^2}, \frac{u^2 - p^2}{u^2 + p^2} \right)$$

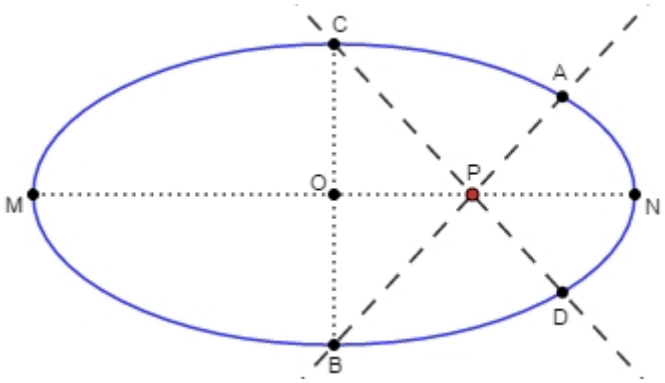
de forma que:

$$\rho = \frac{AP}{BP} = \frac{\dfrac{(u^2 - p^2)\sqrt{p^2 + 1}}{u^2 + p^2}}{\sqrt{p^2 + 1}} = \frac{u^2 - p^2}{u^2 + p^2}$$

y, por tanto, para cada $\rho \in (0,1)$, tomando $p = u\sqrt{\dfrac{1-\rho}{1+\rho}}$, el triángulo ABC verifica las condiciones del enunciado, siendo D el segundo punto de intersección entre la recta CP y la elipse, ya que, como el trapecio $ADBC$ es isósceles, entonces:

$$\frac{DP}{CP} = \frac{AP}{BP} = \rho$$

TRIÁNGULOS CABRI



④ Si $\mathcal{C}$ es una hipérbola con semiejes a y b, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el centro O de la hipérbola y eje de abscisas en el eje focal de ésta, tomando como unidad de medida la longitud b de su semieje imaginario y llamando $u=\frac{a}{b}$, resulta que su ecuación es:

$$x^2-u^2y^2=u^2$$

Además, si M y $N=(u,0)$ son los vértices de esta hipérbola, como cualquier recta que no sea paralela a sus asíntotas corta a la hipérbola en dos puntos y las pendientes de sus asíntotas son $\pm\frac{1}{u}$, para cada punto $P=(p,0)\ (0<p<u)$ situado en el segmento ON, la recta que pasa por P y tiene pendiente $\frac{1}{2u}\left(\neq\pm\frac{1}{u}\right)$:

$$y=\frac{x-p}{2u}$$

corta a la hipérbola en dos puntos:

$$\begin{cases} A=\left(\dfrac{2\sqrt{p^2+3u^2}-p}{3},\dfrac{\sqrt{p^2+3u^2}-2p}{3u}\right) \\ B=\left(-\dfrac{2\sqrt{p^2+3u^2}+p}{3},-\dfrac{\sqrt{p^2+3u^2}+2p}{3u}\right) \end{cases}$$

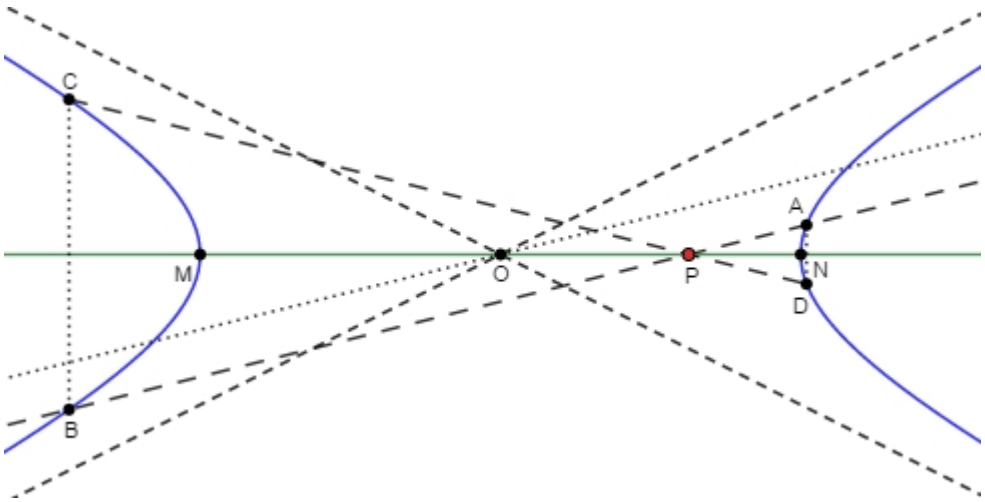
de forma que:

$$\rho=\frac{AP}{BP}=\frac{\dfrac{\left(\sqrt{p^2+3u^2}-2p\right)\sqrt{4u^2+1}}{3u}}{\dfrac{\left(\sqrt{p^2+3u^2}-2p\right)\sqrt{4u^2+1}}{3u}}=\frac{\sqrt{p^2+3u^2}-2p}{\sqrt{p^2+3u^2}+2p}$$

y, por tanto, para cada $\rho\in(0,1)$, tomando $p=\dfrac{\sqrt{u}\,(1-\rho)}{\sqrt{3\rho^2+10\rho+3}}$, el triángulo ABC verifica las condiciones del enunciado, siendo D el segundo punto de intersección entre la recta CP y la hipérbola, ya que, como el trapecio $ADBC$ es isósceles, entonces:

$$\frac{DP}{CP}=\frac{AP}{BP}=\rho$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega



⑤ Si $\mathcal{C}$ es una parábola de parámetro focal p, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el vértice V de esta parábola y eje de abscisas en su eje, resulta que su ecuación es:

$$y^2 = 2px$$

siendo su foco el punto $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Además, como la recta perpendicular al eje de la parábola pasando por su foco:

$$x = \frac{p}{2}$$

corta a la parábola en dos puntos:

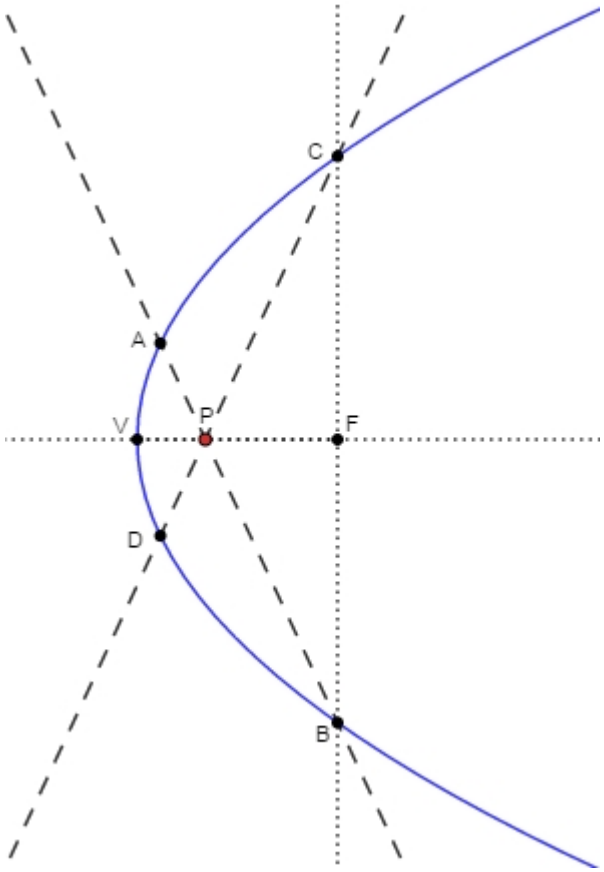
$$\begin{cases} B = \left(\frac{p}{2}, -p\right) \\ C = \left(\frac{p}{2}, p\right) \end{cases}$$

para cualquier punto $P = (v, 0)\ \left(0 < v < \frac{p}{2}\right)$ situado en el segmento VP, la recta BP corta a la parábola en un segundo punto:

$$A = \left(\frac{2v^2}{p}, 2v\right)$$

de forma que:

$$\rho = \frac{AP}{BP} = \frac{\frac{v\sqrt{4v^2 - 4pv + 5p^2}}{p}}{\frac{\sqrt{4v^2 - 4pv + 5p^2}}{2}} = \frac{2v}{p}$$

y, por tanto, para cada $\rho \in (0,1)$, tomando $v = \frac{\rho p}{2}$, el triángulo ABC verifica las condiciones del enunciado, siendo D el segundo punto de intersección entre la recta CP y la parábola, ya que, como el trapecio $ADBC$ es isósceles, entonces:

$$\frac{DP}{CP} = \frac{AP}{BP} = \rho$$