Pr. Cabri 961

Enunciado

Dado un triángulo ABC rectángulo en B, se considera un punto D que no está situado sobre
ninguna de las rectas que contienen a sus lados:
A) Probar que existe una única cónica de tipo hiperbólico que circunscribe al cuadrilátero ABCD siendo
sus asíntotas perpendiculares. Indicar en que casos esta cónica es degenerada.
B)Probar que, si dicha cónica no es degenerada, entonces, es tangente en el punto B a la altura
correspondiente al vértice B del triángulo ABC.

Pérez, M. A. (2020).

Solución

de César Beade Franco

A) La cónica buscada es una hipérbola equilátera (asíntotas perpendiculares) que queda determinada de manera única por 4 puntos.
Los casos degenerados se presentan, en general, cuando P está sobre alguno de los lados.
Aquí, triángulo rectángulo en B, hay que añadir el caso en que P esté sobre la altura relativa a B. Esto se explica recordando que una hipérbola equilátera pasa por el orto-centro de cualquier triángulo inscrito en ella. Así que nos encontraríamos con 3 puntos alineados, B, P y el ortocentro de ACP.

B) Sean A(0,a), B(0,0), C(c,0), P(p,q). La ecuación de la cónica es (1)

$$(c-p)\,p+(a-q)\,q)\left(-p^2\,x\,y+q\,(-a+q)\,x\,y+c\,p\,x\,(-q+y)+p\,q\left(x^2+(a-y)\,y\right)\right.$$

La tangente (polar en este caso) por B (2) es la recta cx-ay=0, perpendicular al lado AC, ax+cy-ac=0.

Notas

(1) Toda cónica viene dada por $\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}xy+\mathbf{c}y^2+\mathbf{d}x+\mathbf{e}y+\mathbf{f}=0$, sin que a, b y c se anulen simultáneamente.
Llamando (x_i, y_i) $i=1, \ldots, 5$ a las coordenadas de los 5 puntos que definen la cónica y suponiendo que (x,y) son las coordenadas de cualquier otro punto de la cónica, se obtiene el siguiente sistema que tiene como incógnitas los coeficientes a, b, c, d, e, f de la ecuación general

$$\mathbf{a}x_i^2+\mathbf{b}x_i\,y_i+\mathbf{c}y_i^2+\mathbf{d}x_i+\mathbf{e}y_i+\mathbf{f}=0\ ,\quad i=1,\ \ldots,\ 5$$
$$\mathbf{a}x^2+\mathbf{b}xy+\mathbf{c}y^2+\mathbf{d}x+\mathbf{e}y+\mathbf{f}=0\ ,$$

El sistema homogéneo tiene solución no trivial si la matriz de los coeficientes tiene determinante igual a 0,

$$\operatorname{Det}\left[\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0$$

De aquí es fácil construir un comando para calcular cónicas por cinco puntos.
Una hipérbola equilátera puede tratarse de la misma manera añadiendo como quinto punto uno de los ortocentros de los triángulos determinados por los otros 4.

(2) La polar de un punto P(a,b) viene dada por (a,b,1) A $(x, y, 1)^t$, donde A es la matriz asociada a la cónica.