

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 961. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC rectángulo en B , se considera un punto D que no está situado sobre ninguna de las rectas que contienen a sus lados:

- ① Probar que existe una única cónica de tipo hiperbólico que circunscribe al cuadrilátero $ABCD$ siendo sus asíntotas perpendiculares. Indicar en que casos esta cónica es degenerada.
- ② Probar que, si dicha cónica no es degenerada, entonces, es tangente en el punto B a la altura correspondiente al vértice B del triángulo ABC .

Solución:

Como el triángulo ABC es rectángulo en B , se verifica que:

$$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow \begin{cases} S_A = c^2 \\ S_B = 0 \\ S_C = a^2 \end{cases}$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , existen $p \neq 0 \neq q$ tales que $D = (1 : p : q)$ y, si la ecuación de una cónica general circunscrita al dicho triángulo es:

$$uxy + vxz + yz = 0 \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

(si el coeficiente de yz fuese nulo, imponiendo que esta cónica pase por el punto D , se obtendría la cónica $x(qy - pz) = 0$, que es el par de rectas formado por BC y AD , que sólo serían perpendiculares si el punto D estuviese situado sobre la recta AB , lo cual no es posible), entonces, sus puntos del infinito vienen dados por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = xy + vxz + yz \\ 0 = x + y + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \left(2 : -1 + u - v - \sqrt{(u-v)^2 - 2(u+v) + 1} : -1 - u + v + \sqrt{(u-v)^2 - 2(u+v) + 1} \right) \\ I_2 = \left(2 : -1 + u - v + \sqrt{(u-v)^2 - 2(u+v) + 1} : -1 - u + v - \sqrt{(u-v)^2 - 2(u+v) + 1} \right) \end{cases}$$

por lo que, imponiendo que las asíntotas de esta cónica sean perpendiculares, resulta que:

$$0 = I_1 \cdot I_2 \Rightarrow 4(c^2 + a^2u) \Rightarrow u = -\frac{c^2}{a^2}$$

y, por tanto, la ecuación de una cónica general de tipo hiperbólico que circunscribe al triángulo ABC siendo sus asíntotas perpendiculares es:

$$-c^2xy + a^2vxz + a^2yz = 0 \quad (v \in \mathbb{R})$$

A continuación, imponiendo que esta cónica pase por el punto D , obtenemos que:

$$-c^2p + a^2vq + a^2pq = 0 \Rightarrow v = \frac{p(c^2 - a^2q)}{a^2q}$$

por lo que la ecuación de la única cónica de tipo hiperbólico que circunscribe al cuadrilátero $ABCD$ siendo sus asíntotas perpendiculares es:

$$-c^2qxy + p(c^2 - a^2q)xz + a^2qyz = 0$$

TRIÁNGULOS CABRI

siendo:

$$\begin{vmatrix} 0 & -c^2q & p(c^2 - a^2q) \\ -c^2q & 0 & a^2q \\ p(c^2 - a^2q) & a^2q & 0 \end{vmatrix} = -2a^2c^2pq(c^2 - a^2q) = 0 \Leftrightarrow c^2 - a^2q = 0$$

lo cual significa que esta cónica es degenerada si y sólo si el punto $D = (1 : p : q)$ está situado sobre la recta de ecuación:

$$c^2x - a^2z = 0$$

que corresponde a la altura correspondiente al vértice B del triángulo ABC . Finalmente, si esta cónica es no degenerada (es decir, si es una hipérbola equilátera), como la ecuación de la recta polar del punto B respecto de ella es:

$$0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -c^2q & p(c^2 - a^2q) \\ -c^2q & 0 & a^2q \\ p(c^2 - a^2q) & a^2q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -q(c^2x - a^2z) \Rightarrow c^2x - a^2z = 0$$

entonces, esta hipérbola equilátera es tangente en el punto B a la altura correspondiente al vértice B del triángulo ABC .

