

Quincena del 1 al 15 de Diciembre de 2020.

Propuesto Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz).

**Problema 961.-** *Dado un triángulo PQS rectángulo en Q, se considera un punto R que no está situado sobre ninguna de las rectas que contienen a sus lados:*

*A) Probar que existe una única cónica de tipo hiperbólico que circunscribe al cuadrilátero PQRS siendo sus asíntotas perpendiculares. Indicar en qué casos esta cónica es degenerada.*

*B) Probar que, si dicha cónica no es degenerada, entonces, es tangente en el punto Q a la altura correspondiente al vértice Q del triángulo PQS.*

M. A. (2020): Comunicación personal.

**Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.**

**A) Hipérbolas equiláteras de un haz.**

En un haz de cónicas hay siempre hipérbolas. Por cada punto del infinito pasa una cónica del haz, y todas ellas, (excepto a lo sumo dos parábolas) son hipérbolas.

Las asíntotas son las rectas tangentes a la hipérbola en los puntos del infinito.<sup>1</sup> Ambas pasan por su centro.

Cuando las dos asíntotas son perpendiculares, se dice que la hipérbola es equilátera. También puede decirse que una hipérbola equilátera (o rectangular) es aquella cuyas asíntotas encuentran a la recta del infinito en un par recíproco de la involución absoluta<sup>2</sup>.

Dada la cónica definida por los puntos  $P, Q, R, S$  y  $T$ , con cuatro de ellos definimos una involución sobre ella (restricción de una homología armónica del plano, como ya dijimos en el problema 953).

El centro de la homología es el centro de la involución y su eje, la polar de éste respecto de la cónica (son un vértice del triángulo diagonal del cuadrilátero –autopolar– y el lado opuesto).

Pues bien, **en un haz de cónicas existe siempre una hipérbola equilátera.**

*En toda involución sobre un haz de rectas  $P^*$  existe siempre un par de rectas homólogas perpendiculares (es decir, hay un par común con la involución rectangular).*

Para hallarlo cortaremos el haz con una circunferencia que pase por el vértice  $P$  del haz. Hallamos el centro  $I$  de la involución resultante, y unido con el centro de la circunferencia  $O$  se determinarán dos puntos diametrales  $D, D'$ . Las rectas homólogas rectangulares pedidas son  $PD$  y  $PD'$ .

Por tanto, la involución definida por el haz (de cónicas) en la recta del infinito tiene un par en común con la involución absoluta. Ese par corresponde a una hipérbola equilátera. Los puntos de ese par unidos con el centro determinan las dos asíntotas (perpendiculares) de esa hipérbola.

Si hubiera otro par común, las dos involuciones coincidirían en todos los pares. Todas las cónicas serían hipérbolas equiláteras.

---

<sup>1</sup> .- No se considera que la parábola tenga una asíntota, por ser ésta la propia recta del infinito.

<sup>2</sup> .- Se llama así a la definida en la recta del infinito por los puntos de corte de los pares de rectas perpendiculares. Es, evidentemente, una involución elíptica.

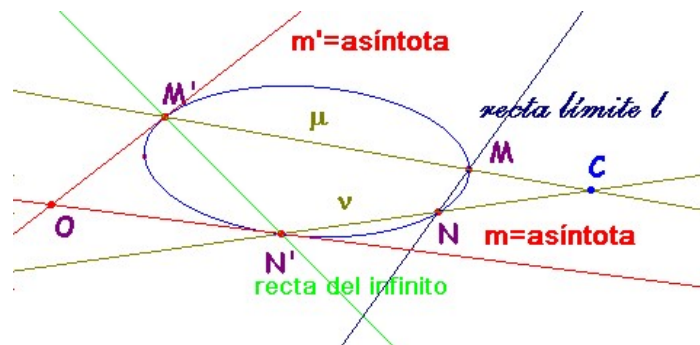
## Determinación de la hipérbola equilátera

1)

Para una hipérbola cualquiera en la homología que tenemos definida

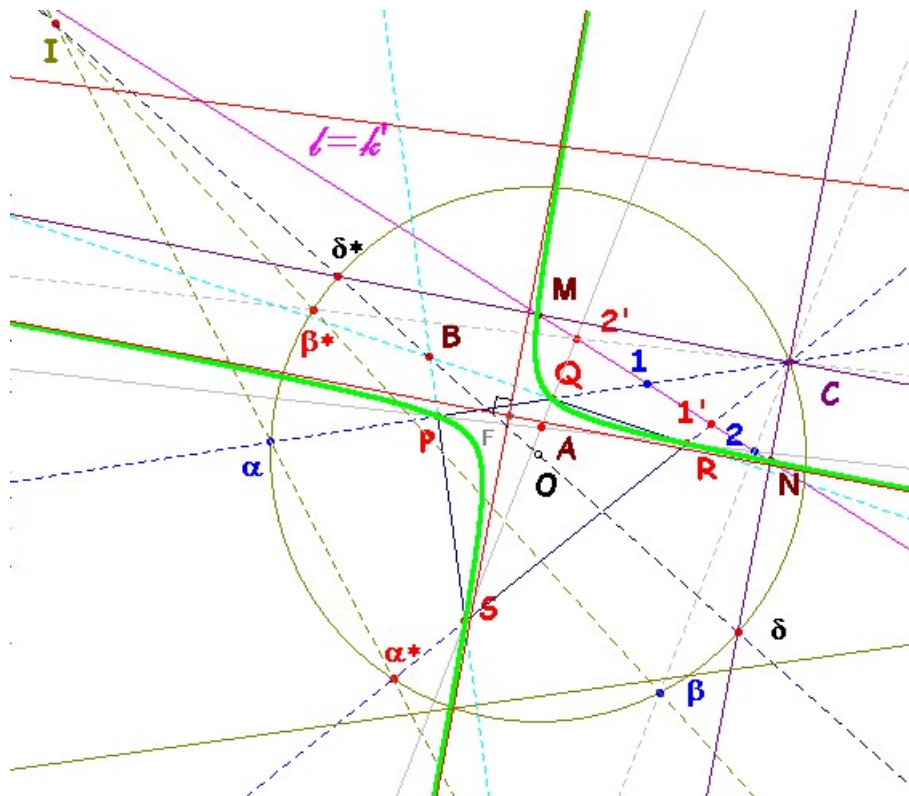
**La tangente  $m'$  en un punto del infinito  $M'$  (asíntota), es paralela a la recta  $\mu$  que une su homólogo  $M$  con el centro de la homología,**

según puede observarse en el dibujo realizado en el plano proyectivo, (ambas rectas se cortan en un punto del infinito).



**Si la hipérbola es equilátera, sus asíntotas son perpendiculares y por tanto también son perpendiculares las rectas  $\mu$  y  $\nu$ .**

**Para determinar la hipérbola equilátera del haz tenemos que hallar los puntos  $M, N$  de intersección de esta cónica con la *recta límite*. El par buscado pertenece a la sección por  $l$  de la involución rectangular de centro  $C$ . (La homología se toma con centro  $C$  y eje  $AB$ )**



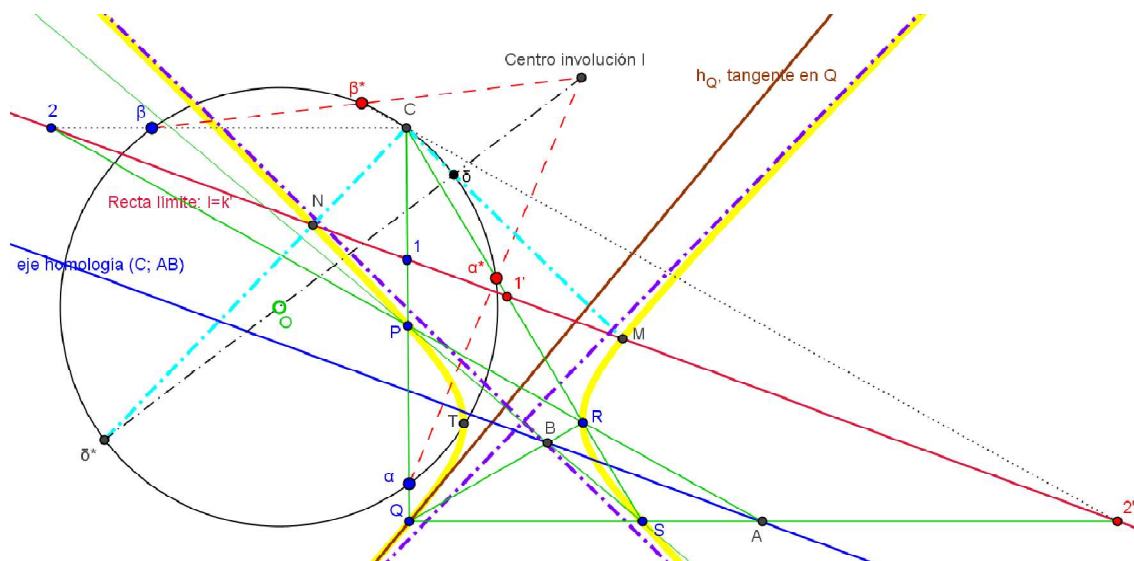
En una figura como la empleada para hallar las parábolas del haz (problema 953) proyectamos la involución sobre la recta límite en otra sobre una circunferencia cualquiera que pase por el centro de la homología  $C$ ; hallamos el centro  $I$  de la involución sobre la circunferencia (intersección de pares  $XX'$ ) y lo unimos con el centro  $O$  de la misma. Los dos puntos diametrales  $\delta, \delta^*$  alineados con  $I$  nos darán proyectados desde  $C$  las rectas homólogas perpendiculares buscadas. Cortando estas rectas con la recta límite se obtienen los puntos  $M, N$  que resuelven el problema: la hipérbola equilátera es la cónica del haz que pasa por los puntos  $M$  y  $N$  (basta con uno para quedar determinada). Hallando el centro de esta cónica, podemos fácilmente trazar sus dos asíntotas.

**Obsérvese que las rectas  $CM$  y  $CN$  son paralelas a las asíntotas de la hipérbola, tal como se había dicho.**

**2)** Hay otra forma de encontrar esta hipérbola equilátera que es más directa, viendo que *todas las cónicas que pasan por los puntos del cuadrivértice definido por un triángulo y su ortocentro son hipérbolas equiláteras*.

En efecto, las cónicas del haz degeneradas, son pares de rectas perpendiculares (base y altura del triángulo), es decir, hipérbolas equiláteras. La involución inducida por el haz de cónicas en la recta del infinito posee pues, tres pares comunes con la involución absoluta (bastaría que fueran dos), en consecuencia, todos los pares de esta involución coinciden con la absoluta, o lo que es igual, todas las cónicas del haz son hipérbolas equiláteras.

En el problema presente, donde se ha tomado  $\angle PQS = 90^\circ$ , bastaría con elegir el ortocentro  $T$  del triángulo no rectángulo  $\Delta PQR$ . La cónica que pasa por  $P, Q, R, S$  y  $T$  es, según lo anterior, la única hipérbola equilátera del haz definido por los cuatro primeros.



**B)**

Para esta parte demostraremos que si en una hipérbola equilátera (podemos suponer que de ecuación  $xy = 1$ ), se inscribe un triángulo  $PQS$ , rectángulo en  $Q = \left(q, \frac{1}{q}\right)$ , la tangente a la hipérbola en  $Q$  es igual a la altura desde este punto.

La ecuación de la tangente es la de la polar y viene dada por  $x \cdot \frac{1}{q} + qy = 2$ , o bien,  $x + q^2y = 2q$ .

Sea  $P = \left(p, \frac{1}{p}\right)$ , el punto  $S$  lo obtenemos trazando desde  $Q$  una perpendicular a la recta  $PQ$ . El vector  $\overrightarrow{PQ} = Q - P = \frac{q-p}{(pq)}(pq, -1)$  y por tanto  $S \neq P$  está sobre la recta de ecuación  $y - \frac{1}{q} = pq(x - q)$  que corta a la hipérbola en el punto  $S = \left(-\frac{1}{pq^2}, -pq^2\right)$ .

El vector  $\overrightarrow{PS} = S - P = -\frac{1+p^2q^2}{pq^2}(1, q^2)$  y con ello la altura  $h_Q$  de  $PQS$  es la recta cuya ecuación es  $y - \frac{1}{q} = -\frac{1}{q^2}(x - q)$ , o bien,  $x + q^2y - 2q = 0$  que es la ecuación de la tangente en  $Q$  obtenida antes. Y con esto concluimos. ■