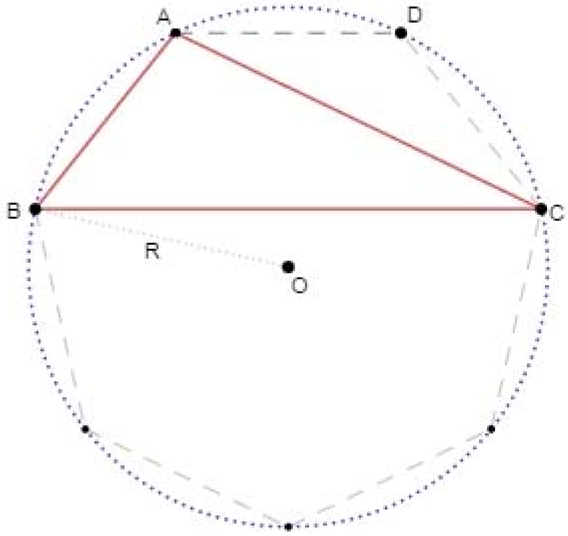
TRIÁNGULOS CABRI

Problema 963. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo heptagonal ABC con circunradio R, probar que:

$$R^2 = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{7}$$

Solución:



Como el ángulo central del heptágono regular es $\frac{2\pi}{7}$, entonces:

$$\triangle ADC = 2\left(\frac{\pi - \frac{2\pi}{7}}{2}\right) = \frac{5\pi}{7} \Rightarrow \triangle CAD = \frac{\pi - \frac{5\pi}{7}}{2} = \frac{\pi}{7} \Rightarrow \triangle BAC = \frac{4\pi}{7}$$

y como el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio isósceles, resulta que:

$$\pi = \triangle ADC + \triangle CBA = \frac{5\pi}{7} + \triangle CBA \Rightarrow \triangle CBA = \frac{2\pi}{7} \Rightarrow \triangle ACB = \frac{\pi}{7}$$

Además, por razones de proporcionalidad, podemos suponer que el lado del heptágono tiene longitud unidad, por lo que, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, resulta que $c = 1$, por lo que:

- ☺ Como las ecuaciones de la recta paralela a BC pasando por A y de la bisectriz interior correspondiente al vértice B son:

$$\begin{cases} AD \equiv 0 = y + z \\ BD \equiv 0 = x - az \end{cases}$$

entonces, resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, obtenemos que:

$$D = (a : -1 : 1)$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

- ☺ Como la ecuación de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo es:

$$xy + b^2xz + a^2yz = 0$$

entonces, imponiendo que el punto D está situado sobre ella, resulta que:

$$a(b^2 - a - 1) = 0 \underset{a>0}{\Rightarrow} b^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = b^2 - 1$$

- ☹ Como, según el Teorema del Coseno, se verifica que:

$$b^2 = a^2 + 1 - 2a\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$$

entonces, resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, obtenemos que:

$$\begin{cases} a = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \\ b = 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \end{cases}$$

Una vez aclarado todo esto, como el polinomio de Chebyshev para $n = 7$ es:

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

y:

$$T_7\left[\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right] = \cos(\pi) = -1$$

entonces, $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ es una raíz de la ecuación:

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x = -1$$

es decir, es una raíz de la ecuación:

$$0 = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + 1 = (x+1)(8x^3 - 4x^2 - 4x + 1)^2$$

y, por tanto, es una raíz de la ecuación:

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

lo cual significa que:

$$b^3 - b^2 - 2b + 1 = 8\cos^3\left(\frac{\pi}{7}\right) - 4\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right) - 4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + 1 = 0$$

y, en todos los cálculos que vamos a hacer a continuación, tendremos en cuenta los restos módulo el polinomio $b^3 - b^2 - 2b + 1$. Como:

$$\begin{aligned} O &= (a^2S_A : b^2S_C : c^2S_C) \\ &= (-1 + b + b^2 : 1 - 2b - 2b^2 : 1 - b - 2b^2) \\ &= \left(\frac{-1+b+b^2}{1-2b-3b^2} : \frac{1-2b-2b^2}{1-2b-3b^2} : \frac{1-b-2b^2}{1-2b-3b^2}\right) \end{aligned}$$

y:

$$\begin{cases} S_A = \dfrac{1-b}{2} \\ S_B = \dfrac{1+b}{2} \\ S_C = \dfrac{-1+b+2b^2}{2} \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{aligned} R^2 &= AO^2 \\ &= \frac{1-b}{2}\left(\frac{-1+b+b^2}{1-2b-3b^2}-1\right)^2 + \frac{1+b}{2}\left(\frac{1-2b-2b^2}{1-2b-3b^2}\right)^2 + \frac{-1+b+2b^2}{2}\left(\frac{1-b-2b^2}{1-2b-3b^2}\right)^2 \\ &= \frac{2b^2+b+1}{7} \\ &= \frac{(b^2+b)+b^2+1}{7} \\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{7} \\ &= \frac{AB^2+BC^2+CA^2}{7} \end{aligned}$$