Quincena del 1 al 15 de Diciembre de 2020.

Propuesto Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES “Bartolomé-José Gallardo” de Campanario (Badajoz).

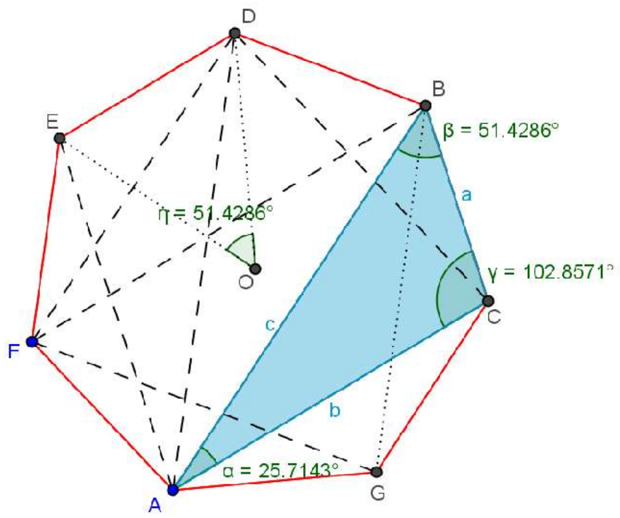
***Problema* 963**.- *Dado un triángulo heptagonal ABC con circunradio R, probar que*

$$R^2 = \frac{AB^2 + BC^2 + CA^2}{7}.$$

M. A. (2020): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Según se dice en la Wikipedia *un triángulo heptagonal es un triángulo escaleno obtuso cuyos vértices coinciden con el primer, segundo y cuarto vértices de un heptágono regular (desde un vértice inicial arbitrario). Por lo tanto, sus tres lados coinciden con un lado y con las diagonales adyacentes más cortas y más largas de un heptágono regular. Sus ángulos miden* $\frac{\pi}{7}, \frac{2\pi}{7}$ *y* $\frac{4\pi}{7}$.



Si, en la expresión a demostrar, sustituimos cada lado por su expresión en función del ángulo opuesto y el radio de la circunferencia circunscrita, ésta resulta equivalente a

$$\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C = \frac{7}{4}$$

Y si en lugar de los senos se ponen los cosenos hay que demostrar que

$$\boldsymbol{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{5}{4}}$$

En la figura hemos situado el triángulo ABC dentro del heptágono regular. Observando varios de los cuadriláteros (cíclicos) que ahí se forman, aplicando el teorema de Ptolomeo, podemos llegar a las siguientes conclusiones:

1) Del cuadrilátero $ABCG$ deducimos $\boldsymbol{a^2 + ac = b^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{a+c}{b} = \frac{b}{a}}$.

2) Del cuadrilátero $ABDF$, $\boldsymbol{c^2 - bc = a^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{b-c}{a} = \frac{-a}{c}}$.

3) Del $CDFG$, $\boldsymbol{b^2 + ab = c^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{b+a}{c} = \frac{c}{b}}$.

4) Sumando estas tres, o bien considerando el cuadrilátero $ACBD$ obtenemos $\boldsymbol{ab + ac = bc}$, que también puede ponerse como $\boldsymbol{\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$ que resulta más expresiva.

Con estas expresiones y el teorema del coseno obtendremos los valores de los cosenos del triángulo heptagonal ABC.

5) De la expresión 2) primero y después con 4) podemos obtener $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{b+c}}{\mathbf{2}\boldsymbol{c}} = \frac{b}{2a}$

6) De 3) $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{b+a}}{\mathbf{2}\boldsymbol{c}} = \frac{c}{2b}$ y por último, **7)** De 2) $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{C} = \frac{b-c}{2a} = \frac{\boldsymbol{-a}}{\mathbf{2}\boldsymbol{c}}$

Ahora ya estamos en condiciones para resolver el problema:

La suma de los cuadrados de los cosenos del ángulo es igual a $\frac{1}{4c^2}[(b+c)^2 + (b+a)^2 + a^2]$.

El numerador de esa expresión es $2(b^2 + a^2 + bc + ab) + c^2$, pero según 2) y 3)

$$b^2 + ab = c^2 = a^2 + ac$$

y por tanto

$$2(b^2 + a^2 + bc + ab) + c^2 = 5c^2$$

De todo ello resulta finalmente

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{(b+c)^2 + (b+a)^2 + a^2}{4c^2} = \frac{2(b^2 + a^2 + bc + ab) + c^2}{4c^2} = \frac{5c^2}{4c^2}$$
$$= \frac{5}{4}$$

Y con esto concluimos. ■