

Pr. Cabri 964

Enunciado

Sea F el punto medio del lado BC de un triángulo ABC, y sea T el pie de la altura del vértice B. Demostrar que si $\angle FAC = 30^\circ$, $\angle FAC = 150^\circ$ entonces $AF = BT$

Komal (2020) Octubre, Based on the idea of S. Róka, Nyíregyháza (ampliado a todo tipo de triángulo).

Solución

de César Beade Franco

Tomemos $A(0,0)$ y $F(1,0)$ fijos. $C(c,mc)$ está situado sobre la recta $r: y = mx$, es decir, $\angle FAC$ tiene tangente m . B es el simétrico de C respecto a F y tiene coordenadas $B(2-c, -mc)$, es decir está situado sobre la recta $s: y = mx + 2m$, paralela a la anterior.

La altura desde B es la distancia entre las paralelas r y s , es decir $BT = 2 \sqrt{\frac{m^2}{1+m^2}}$, independiente de C.

$$BT = AF \Leftrightarrow 2 \sqrt{\frac{m^2}{1+m^2}} = 1 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ o sea } \angle FAC = 30^\circ \text{ o } \angle FAC = 150^\circ.$$