

Pr. Cabri 966

Enunciado

Sea F el punto medio del lado BC de un triángulo ABC. Construyamos el triángulo de manera que $\angle FAC = 30^\circ$ o $\angle FAC = 150^\circ$.

Hallar el lugar geométrico de los circuncentros y ortocentros, manteniendo fijos A y F.

Barroso, R. (2020), a partir de un problema de Komal Octubre 2020, Based on the idea of S. Róka, Nyíregyháza

Solución

de César Beade Franco

Tomemos $A(0,0)$ y $F(1,0)$ fijos. $C(c,mc)$ está situado sobre la recta $r:y=mx$, es decir, $\angle FAC$ tiene tangente m . B es el simétrico de C respecto a F y tiene coordenadas $B(2-c,-mc)$, es decir está situado sobre la recta $s:y=mx+2m$, paralela a la anterior.

Calculando el circuncentro y el ortocentro de ABC obtenemos las ecuaciones paramétricas de los lugares pedidos. Limitándonos al caso $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Resultan

$$O\left(\left\{1-c+\frac{2c^2}{3}, \frac{-3+5c-2c^2}{\sqrt{3}}\right\}\right) \text{ y } H\left(-\frac{2}{3}c(-3+2c), \frac{2(3-5c+2c^2)}{\sqrt{3}}\right).$$

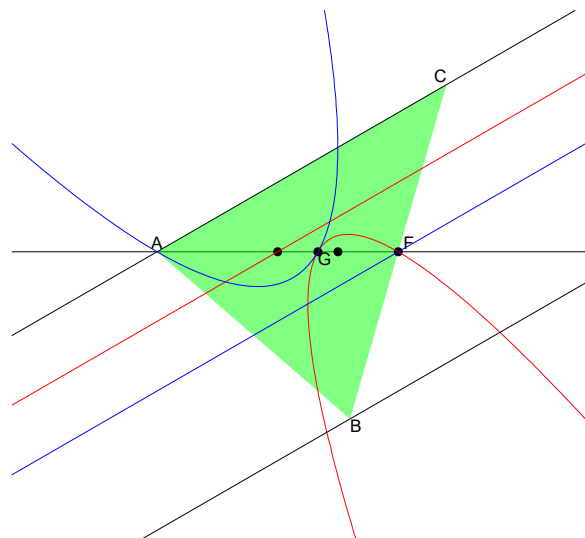
Uno es el transformado isogonal del otro, al serlo O y H y tangentes en G (único invariante en esta transformación).

Eliminando c obtenemos sus ecuaciones implícitas,

$$O(x,y): 3x^2 + x(-5 + 2\sqrt{3}y) - (-2 + \sqrt{3}y - y^2) = 0,$$

$$H(x,y): 3x^2 + x(-2 + 2\sqrt{3}y) - (2\sqrt{3} - y)y = 0.$$

Resultan ser parábolas con directrices paralelas a AC y focos sobre AF.



Out[310]=