Pr. Cabri 966

Enunciado

Sea F el punto medio del lado BC de un triángulo ABC. Construyamos el triángulo de manera que ∠FAC=30º o ∠FAC=150º.
Hallar el lugar geométrico de los circuncentros y ortocentros, manteniendo fijos A y F.
Barroso, R. (2020), a partir de un problema de Komal Octubre 2020, Based on the idea of S. Róka, Nyíregyháza

Solución

de César Beade Franco

Tomemos A(0,0) y F(1,0) fijos. C(c,mc) está situado sobre la recta r:y =mx, es decir, ∠FAC tiene tangente m. B es el simétrico de C respecto a F y tiene coordenadas B(2-c,-mc), es decir está situado sobre la recta s:y=mx+2m, paralela a la anterior.

Calculando el circuncentro y el ortocentro de ABC obtenemos las ecuaciones paramétricas de los lugares pedidos. Limitándonos al caso $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Resultan $O(\left\{1-c+\frac{2c^2}{3}, \frac{-3+5c-2c^2}{\sqrt{3}}\right\})$ y $H(-\frac{2}{3}c\,(-3+2c), \frac{2(3-5c+2c^2)}{\sqrt{3}})$.

Uno es el transformado isogonal del otro, al serlo O y H y tangentes en G (unico invariante en esta transformación).
Eliminando c obtenemos sus ecuaciones implícitas,
O(x,y): $3x^2+x\left(-5+2\sqrt{3}\,y\right)-\left(-2+\sqrt{3}\,y-y^2\right)=0$,
H(x,y): $3x^2+x\left(-2+2\sqrt{3}\,y\right)-\left(2\sqrt{3}-y\right)y$.
Resultan ser parábolas con directrices paralelas a AC y focos sobre AF.

Out[310]=