Problema 966

Sea F el punto medio del lado BC de un triángulo ABC. Construyamos el triángulo de manera que ∠FAC=30º o ∠FAC=150º.

Hallar el lugar geométrico de los circuncentros y ortocentros, manteniendo fijos A yF.

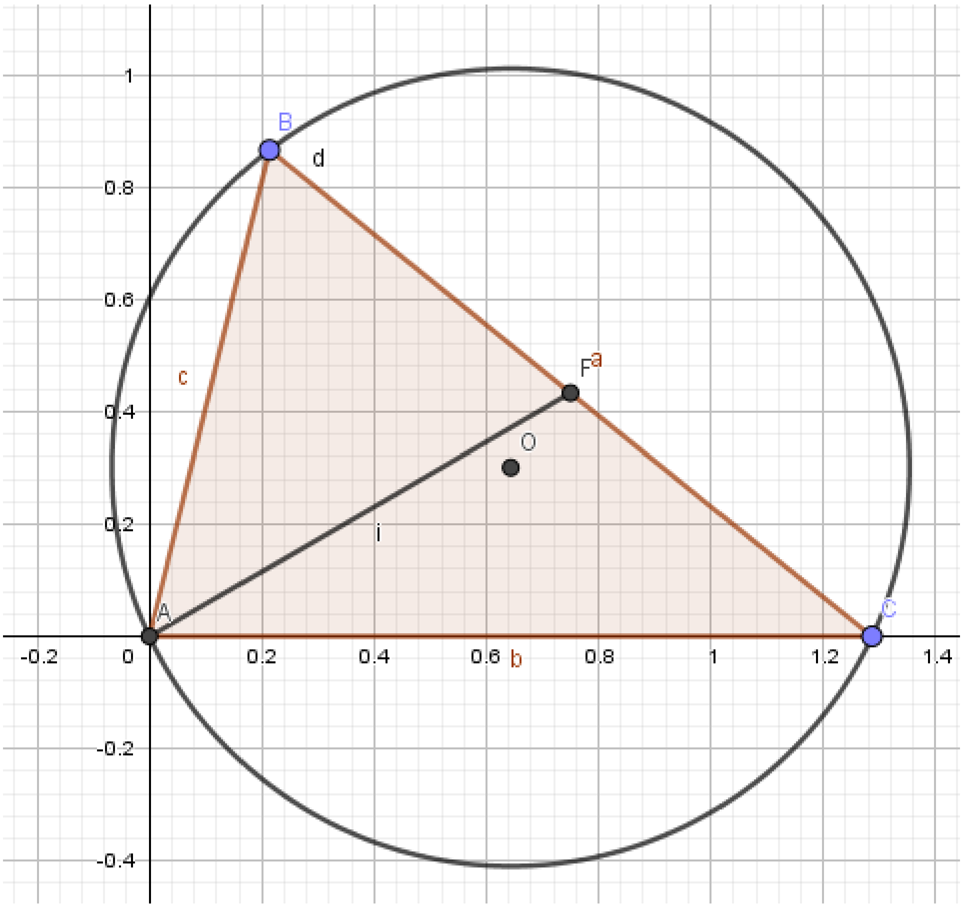
Barroso, R. (2020), a partir de un problema de Komal Octubre 2020, Based on the idea of S. Róka, Nyíregyháza

Solución del director

Tomemos A(0,0), F$\left(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, C (t,0), y será B($\frac{3}{2}-t,\frac{\sqrt{3}}{2}$)

Estudiemos el lugar geométrico de los circuncentros.

La mediatriz de AC es $x=\frac{t}{2}$



La mediatriz de AB es

$$y-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2t-3}{\sqrt{3}}(x-\frac{3-2t}{4})$$

Así el circuncentro de ABC es

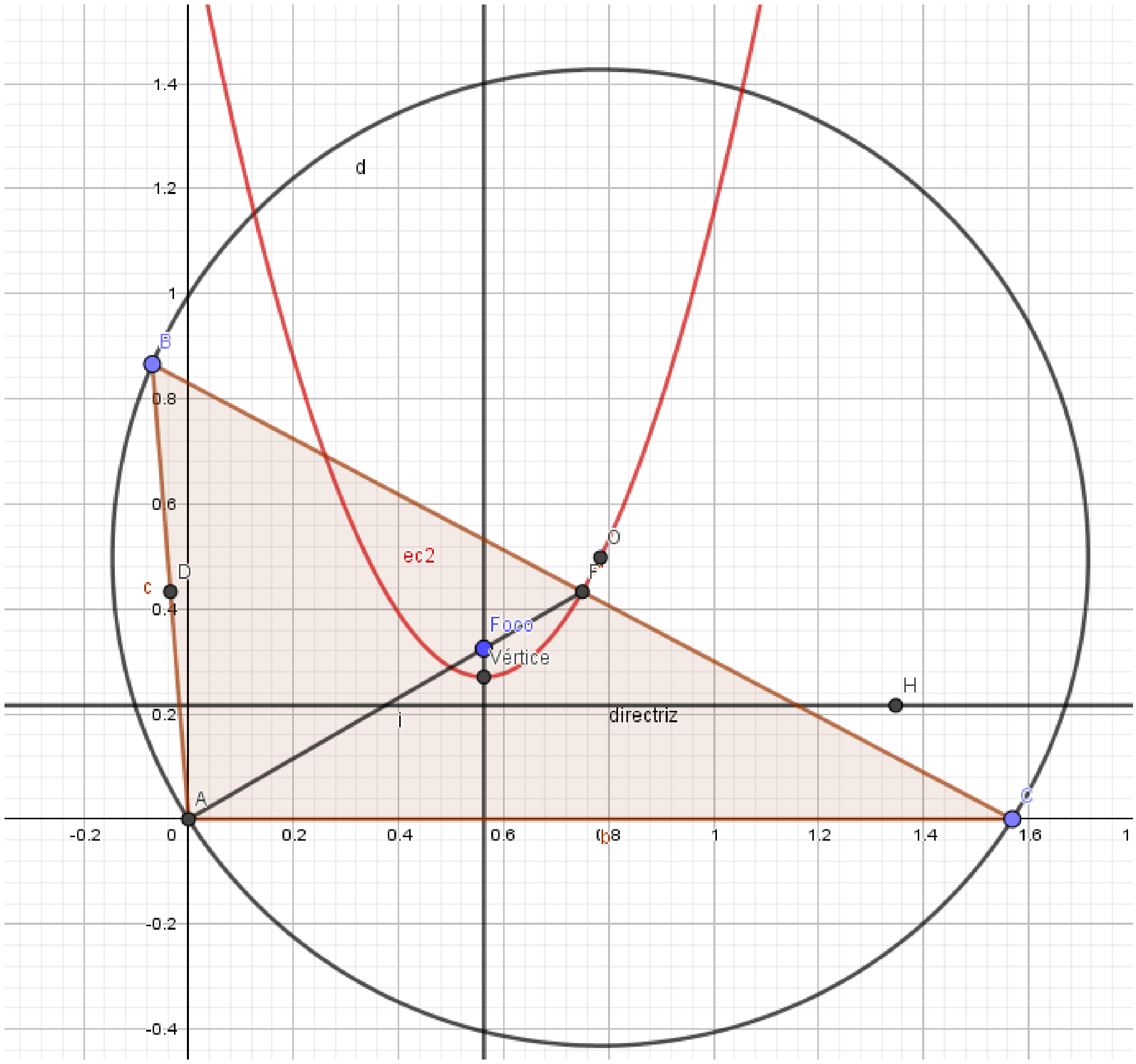
$$O(\frac{t}{2},\frac{2t^2-9t+6}{2\sqrt{3}})$$

Lo que da lugar a la ecuación $y=\frac{8\,x^2-9x+3}{\sqrt{3}}$

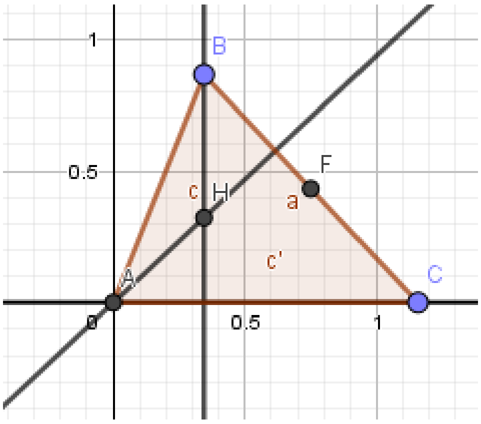
Es $(x-\frac{9}{16})^2=4\,\frac{\sqrt{3}}{32}(y-\frac{5\sqrt{3}}{32})$

Así es una parábola de vértice $V\left(\frac{9}{16},\frac{15\sqrt{3}}{32}\right)$, directriz y=$\frac{\sqrt{3}}{8}$

Y cuyo foco es $F(\frac{9}{16},\frac{3\,\sqrt{3}}{16})$



Estudiemos el lugar geométrico de los ortocentros.



Tomemos de nuevo los mismos puntos de partida.

A(0,0), F$\left(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, C (t,0), y será B($\frac{3}{2}-t,\frac{\sqrt{3}}{2}$)

La altura por B a AC tiene de ecuación $x=\frac{3}{2}-t$

La altura por A a BC, $y=\frac{4t-3}{\sqrt{3}}x$

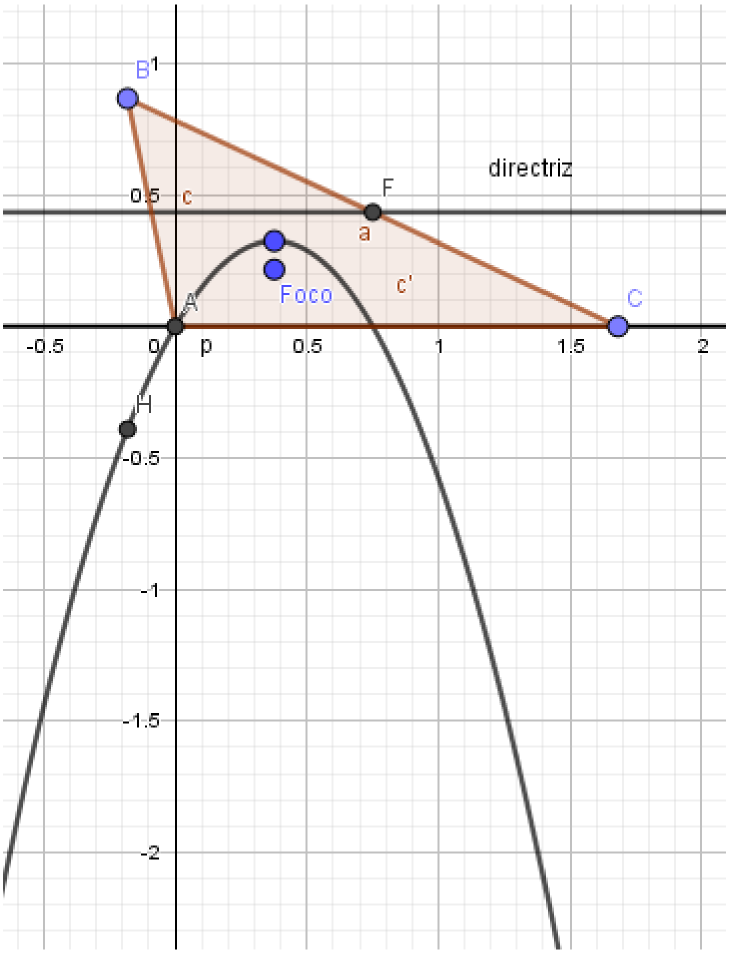
Así el ortocentro de ABC es $H(\frac{3}{2}-t,\frac{-8t^2+18t-9}{2\sqrt{3}})$

Y el lugar geométrico pedido es $y=\frac{-4x^2+3x}{\sqrt{3}}$

Que es una parábola.

$4\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\left(y-\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)=(x-\frac{3}{8})^2$

Así el vértice es$V\left(\frac{3}{8},\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$, la directriz es y=$\frac{\sqrt{3}}{4}$ y el foco es Foco($\frac{3}{8},\frac{\sqrt{3}}{8}$)



B
1
directriz
F
0.5
c
a
c'
Foco
A
C
-0.5
0
p
0.5
1
1.5
2
H
-0.5
-1
-1.5
-2