

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 966a. (propuesto por Ricardo Barroso Campos, a partir de un problema de Komal, Octubre 2020, basado en la idea de S. Róka, Nyíregyháza) Dado un segmento AB , se considera una recta l que pasa por el punto A y forma un ángulo de 30° con la recta AB . Si tomamos un punto P (distinto de A) sobre dicha recta y un punto Q tal que el punto B es el punto medio del segmento PQ , determinar el lugar geométrico que describe el circuncentro del triángulo APQ cuando el punto P recorre la recta l .

Solución:

Por razones de proporcionalidad, podemos suponer que el segmento AB tiene longitud $\sqrt{3}$, por lo que, considerando el punto C de la recta l tal que el triángulo ABC es rectángulo en B , resulta que:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_A = 3 \\ S_B = 0 \\ S_C = 1 \end{cases}$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, si $P = (t : 0 : 1 - t)$ ($t \neq 1$), entonces:

$$Q = (-t : 2 : t - 1)$$

por lo que el circuncentro del triángulo APQ es el punto:

$$O_{APQ} = ((1 - t)(1 + 2t) : 2(1 + t + 4t^2) : -3t(1 + 2t))$$

y eliminando los parámetros t y θ del siguiente sistema de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \theta(1 - t)(1 + 2t) \\ y = 2\theta(1 + t + 4t^2) \\ z = -3\theta t(1 + 2t) \end{cases} \quad (\theta \neq 0, t \neq 1)$$

obtenemos la ecuación de lugar geométrico que describe dicho circuncentro:

$$6x^2 + 4z^2 - 3xy - 6xz + 3yz = 0$$

que corresponde a una parábola, ya que es una cónica no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 12 & -3 & -6 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -72 \neq 0$$

y tiene un único punto en la recta del infinito, cuyas coordenadas están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = x + y + z \\ 0 = 6x^2 + 4z^2 - 3xy - 6xz + 3yz \end{cases} \Rightarrow T_\infty = (-1 : 4 : -3)$$

siendo:

$$T_\infty \cdot AC_\infty = (-1 : 4 : -3) \cdot (1 : 0 : -1) = 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) \cdot (-1) = 0$$

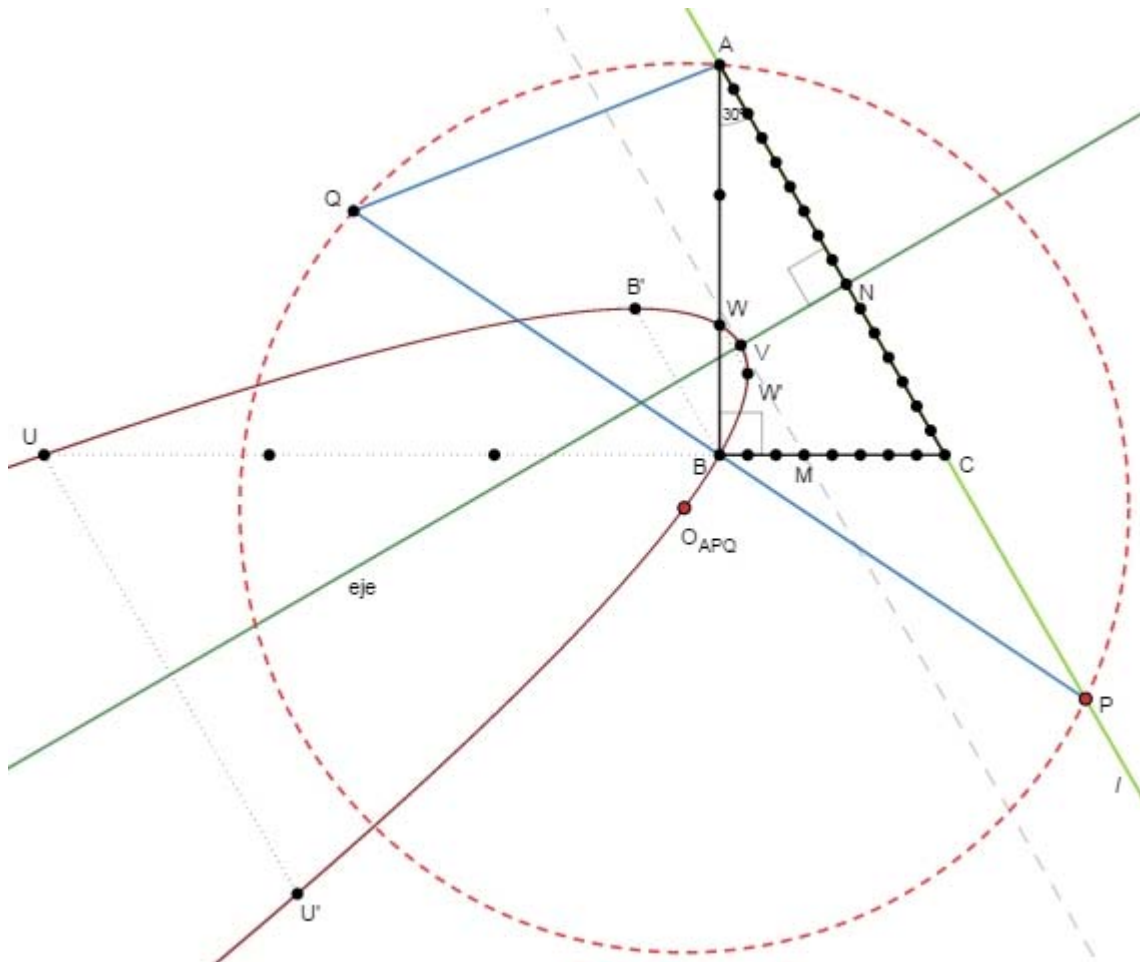
TRIÁNGULOS CABRI

por lo que los diámetros de esta parábola son perpendiculares a la recta AC y, por tanto, su directriz es paralela a dicha recta, lo cual vamos a utilizar para determinar su vértice V . Si $M = (0 : p : 1 - p)$ ($p \in \mathbb{R}$) es el punto de intersección de la recta tangente a la parábola en el punto V con la recta BC , entonces, la ecuación de dicha recta tangente (paralela a la recta AC pasando por el punto M) es:

$$MV \equiv px + (p - 1)y + pz = 0$$

cuyos puntos de intersección con la parábola son:

$$\begin{cases} V_1 = (7 - 4p + \sqrt{3(8p - 5)} : 16p : 9 - 12p - \sqrt{3(8p - 5)}) \\ V_2 = (7 - 4p - \sqrt{3(8p - 5)} : 16p : 9 - 12p + \sqrt{3(8p - 5)}) \end{cases} \quad v_1 = v_2 \Rightarrow p = \frac{5}{8} \Rightarrow \begin{cases} V = (9 : 20 : 3) \\ M = (0 : 5 : 3) \end{cases}$$



Finalmente, para poder construir esta parábola, necesitamos construir, al menos, cinco de sus puntos:

- ① Como la ecuación del eje de esta parábola es:

$$VT_{\infty} \equiv 9x - 3y - 7z = 0$$

entonces, su punto de intersección con la recta AC es $N = (7 : 0 : 9)$, es decir, el punto del segmento AC tal que $AN : NC = 9 : 7$ y, como $BM : MC = 3 : 5$, construyendo estos dos puntos y trazando la recta paralela a AC pasando por M y la recta perpendicular a AC pasando por N (eje de la parábola), obtenemos como intersección de ambas rectas el vértice V de la parábola.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

- ② Esta parábola corta a la recta AB en el punto B y en el punto $W = (1 : 2 : 0)$, es decir, en el punto del segmento AB tal que $AW : WB = 2 : 1$. Además, la reflexión de este punto sobre el eje de la parábola nos proporciona otro punto W' de ésta.
- ③ Esta parábola corta a la recta BC en el punto B y en el punto $U = (0 : 4 : -3)$, es decir, en el punto de la recta BC tal que $BU : UC = -3 : 4$. Además, la reflexión de este punto sobre el eje de la parábola nos proporciona otro punto U' de ésta.

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 966b. (propuesto por Ricardo Barroso Campos, a partir de un problema de Komal, Octubre 2020, basado en la idea de S. Róka, Nyíregyháza) Dado un segmento AB , se considera una recta l que pasa por el punto A y forma un ángulo de 30° con la recta AB . Si tomamos un punto P (distinto de A) sobre dicha recta y un punto Q tal que el punto B es el punto medio del segmento PQ , determinar el lugar geométrico que describe el ortocentro del triángulo APQ cuando el punto P recorre la recta l .

Solución:

Por razones de proporcionalidad, podemos suponer que el segmento AB tiene longitud $\sqrt{3}$, por lo que, considerando el punto C de la recta l tal que el triángulo ABC es rectángulo en B , resulta que:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_A = 3 \\ S_B = 0 \\ S_C = 1 \end{cases}$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, si $P = (t : 0 : 1 - t)$ ($t \neq 1$), entonces:

$$Q = (-t : 2 : t - 1)$$

por lo que el ortocentro del triángulo APQ es el punto:

$$H_{APQ} = (1 - 2t + 4t^2 : -2(1 + 2t)(-1 + 4t) : 6t(1 + 2t))$$

y eliminando los parámetros t y θ del siguiente sistema de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \theta(1 - 2t + 4t^2) \\ y = -2\theta(1 + 2t)(-1 + 4t) \quad (\theta \neq 0, t \neq 1) \\ z = 6\theta t(1 + 2t) \end{cases}$$

obtenemos la ecuación de lugar geométrico que describe dicho circuncentro:

$$-3y^2 - 4z^2 + 6xy + 12xz - 6yz = 0$$

que corresponde a una parábola, ya que es una cónica no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 3 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 36 \neq 0$$

y tiene un único punto en la recta del infinito, cuyas coordenadas están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = x + y + z \\ 0 = -3y^2 - 4z^2 + 6xy + 12xz - 6yz \end{cases} \Rightarrow T_\infty = (-1 : 4 : -3)$$

siendo:

$$T_\infty \cdot AC_\infty = (-1 : 4 : -3) \cdot (1 : 0 : -1) = 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) \cdot (-1) = 0$$

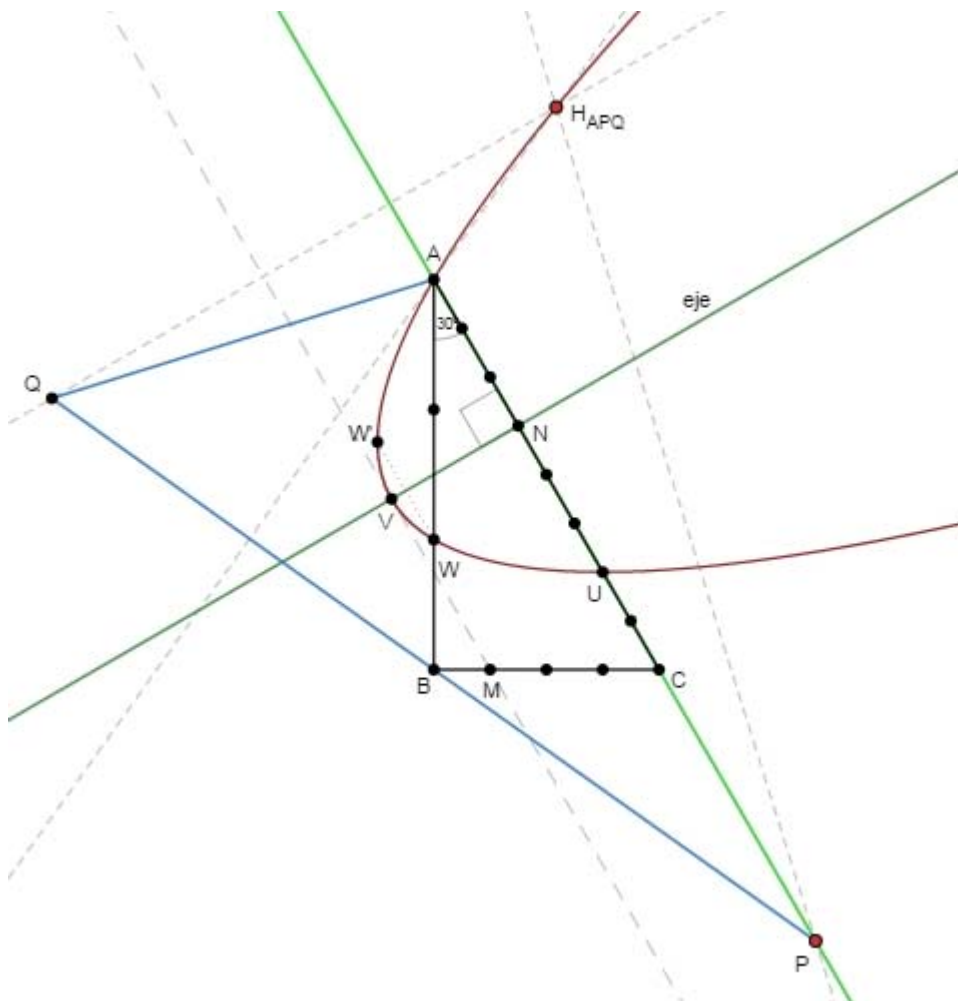
TRIÁNGULOS CABRI

por lo que los diámetros de esta parábola son perpendiculares a la recta AC y, por tanto, su directriz es paralela a dicha recta, lo cual vamos a utilizar para determinar su vértice V . Si $M = (0 : p : 1 - p)$ ($p \in \mathbb{R}$) es el punto de intersección de la recta tangente a la parábola en el punto V con la recta BC , entonces, la ecuación de dicha recta tangente (paralela a la recta AC pasando por el punto M) es:

$$MV \equiv px + (p-1)y + pz = 0$$

cuyos puntos de intersección con la parábola son:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = (5 - p + \sqrt{3(3 - 4p)} : 8p : 3 - 6p - \sqrt{3(3 - 4p)}) \\ V_2 = (5 - p - \sqrt{3(3 - 4p)} : 8p : 3 - 6p + \sqrt{3(3 - 4p)}) \end{array} \right. \xrightarrow{V_1=V_2} p = \frac{3}{4} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V = (7 : 12 : -3) \\ M = (0 : 3 : 1) \end{array} \right.$$



Finalmente, para poder construir esta parábola, necesitamos construir, al menos, cinco de sus puntos:

① Como la ecuación del eje de esta parábola es:

$$VT_\infty \equiv 3x - 3y - 5z = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

entonces, su punto de intersección con la recta AC es $N = (5 : 0 : 3)$, es decir, el punto del segmento AC tal que $AN : NC = 3 : 5$ y, como $BM : MC = 1 : 3$, construyendo estos dos puntos y trazando la recta paralela a AC pasando por M y la recta perpendicular a AC pasando por N (eje de la parábola), obtenemos como intersección de ambas rectas el vértice V de la parábola.

- ② Esta parábola corta a la recta AB en el punto A y en el punto $W = (1 : 2 : 0)$, es decir, en el punto del segmento AB tal que $AW : WB = 2 : 1$. Además, la reflexión de este punto sobre el eje de la parábola nos proporciona otro punto W' de ésta.
- ③ Esta parábola corta a la recta AC en el punto A y en el punto $U = (1 : 0 : 3)$, es decir, en el punto del segmento AC tal que $AU : UC = 3 : 1$. Además, estos dos puntos son simétricos uno del otro respecto del eje de la parábola.