Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

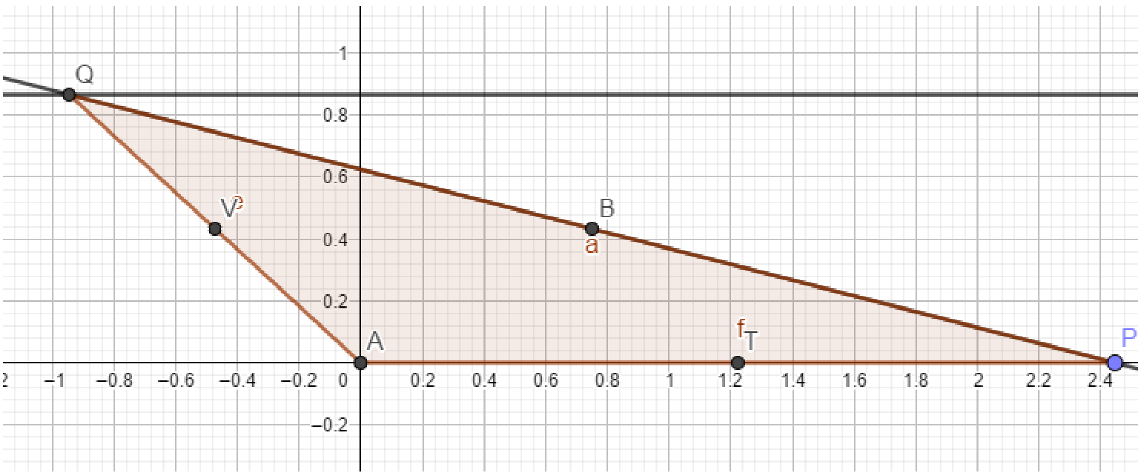
Problema 967. Dado un segmento AB, se considera unarecta *l* que pasa por el punto A y forma un ángulo de 30º con la recta AB. Si tomamos un punto P (distintode A) sobre dicha recta y un punto Q tal que el punto B es el punto medio del segmento PQ, determinar ellugar geométrico que describe el centro de la circunferencia de Euler del triángulo APQ cuando el punto Precorre la recta *l*.

Pérez, M. A. (2020): Comunicación personal.

Tomemos A (0,0), $B(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$ y la recta *l* y=0

El punto P será P(p,0), y el punto Q será $Q(\frac{3}{2}-p,\sqrt{3})$

El centro de la circunferencia de Euler es el centro de la circunferencia medial, es decir el circuncentro del triángulo $B\left(\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right), T\left(\frac{p}{2},0\right) V(\frac{3-2p}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$



La mediatriz de VB es

$$x=\frac{3}{4}-\frac{p}{4}$$

La mediatriz de BT es:

$$y-\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{2x-3}{\sqrt{3}}(x-\left(\frac{p}{4}+\frac{3}{8}\right))$$

Así el centro de la circunferencia de Euler para A(0,0) P(p,0), Q($(\frac{3}{2}-p,\sqrt{3})$ es:

$$O'(\frac{3}{4}-\frac{p}{4},\frac{-8\,p^2+18\,p-6}{8\,\sqrt{3}})$$

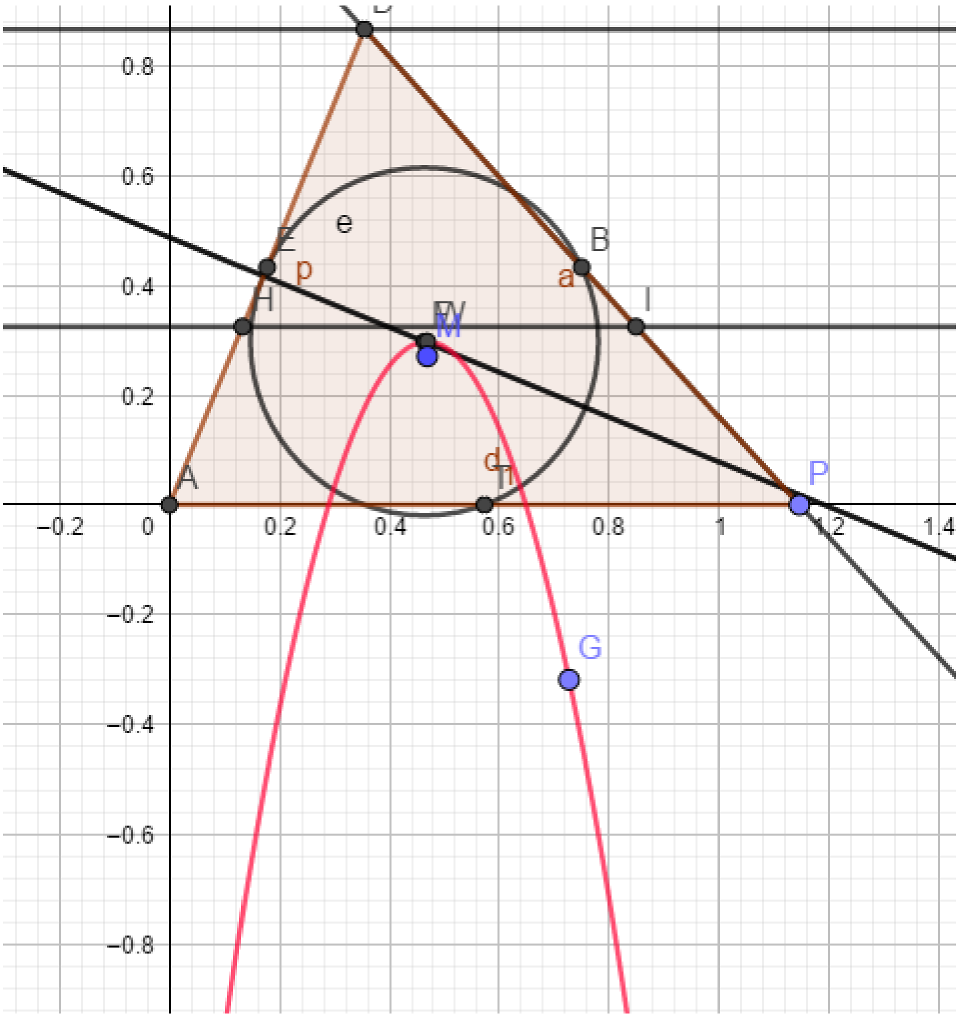
Así el lugar pedido es

$$y=\frac{-16\,x^2+15x-3}{\sqrt{3}}$$

Que es una parábola cuya ecuación canónica es

$$4\,(-\frac{\sqrt{3}}{64}\left(y-\frac{33}{64\sqrt{3}}\right))=(x-\frac{15}{32})^2$$

De donde el vértice es $V(\frac{15}{32},\frac{33}{64\sqrt{3}})$, La directriz es $y=\frac{3\sqrt{3}}{16}$, y el foco es $Foco(\frac{15}{32},\frac{5\sqrt{3}}{16})$



Ricardo Barroso Campos. Jubilado. Sevilla