

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 967. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un segmento AB , se considera una recta l que pasa por el punto A y forma un ángulo de 30° con la recta AB . Si tomamos un punto P (distinto de A) sobre dicha recta y un punto Q tal que el punto B es el punto medio del segmento PQ , determinar el lugar geométrico que describe el centro de la circunferencia de Euler del triángulo APQ cuando el punto P recorre la recta l .

Solución:

Por razones de proporcionalidad, podemos suponer que el segmento AB tiene longitud $\sqrt{3}$, por lo que, considerando el punto C de la recta l tal que el triángulo ABC es rectángulo en B , resulta que:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_A = 3 \\ S_B = 0 \\ S_C = 1 \end{cases}$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, si $P = (t : 0 : 1 - t)$ ($t \neq 1$), entonces:

$$Q = (-t : 2 : t - 1)$$

por lo que los puntos medios de los lados del triángulo APQ son:

$$\begin{cases} B = (0 : 1 : 0) \\ D = (1 - t : 2 : -1 + t) \\ E = (1 + t : 0 : 1 - t) \end{cases}$$

siendo la ecuación de la circunferencia de Euler del triángulo APQ (circunferencia circunscrita al triángulo BDE):

$$3xy + 4xz + yz - [(1 + t - 2t^2)x + (1 - t - 2t^2)z](x + y + z) = 0$$

cuyo centro es el punto:

$$J_{APQ} = (2 - t + 2t^2 : -2(-2 + t + 4t^2) : 3t(1 + 2t))$$

y eliminando los parámetros t y θ del siguiente sistema de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \theta(2 - t + 2t^2) \\ y = -2\theta(-2 + t + 4t^2) \quad (\theta \neq 0, t \neq 1) \\ z = 3\theta t(1 + 2t) \end{cases}$$

obtenemos la ecuación de lugar geométrico que describe dicho circuncentro:

$$6x^2 + 3y^2 + 8z^2 - 9xy - 18xz + 9yz = 0$$

que corresponde a una parábola, ya que es una cónica no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 12 & -9 & -18 \\ -9 & 6 & 9 \\ -18 & 9 & 16 \end{vmatrix} = -144 \neq 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

y tiene un único punto en la recta del infinito, cuyas coordenadas están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = x + y + z \\ 0 = 6x^2 + 3y^2 + 8z^2 - 9xy - 18xz + 9yz \end{cases} \Rightarrow T_{\infty} = (-1 : 4 : -3)$$

siendo:

$$T_{\infty} \cdot AC_{\infty} = (-1 : 4 : -3) \cdot (1 : 0 : -1) = 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 4 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) \cdot (-1) = 0$$

por lo que los diámetros de esta parábola son perpendiculares a la recta AC y, por tanto, su directriz es paralela a dicha recta, lo cual vamos a utilizar para determinar su vértice V . Si $M = (0 : p : 1 - p)$ ($p \in \mathbb{R}$) es el punto de intersección de la recta tangente a la parábola en el punto V con la recta BC , entonces, la ecuación de dicha recta tangente (paralela a la recta AC pasando por el punto M) es:

$$MV \equiv px + (p - 1)y + pz = 0$$

cuyos puntos de intersección con la parábola son:

$$\begin{cases} V_1 = (17 - 8p - \sqrt{3(11 - 16p)} : 32p : 15 - 2p + \sqrt{3(11 - 16p)}) \\ V_2 = (17 - 8p + \sqrt{3(11 - 16p)} : 32p : 15 - 2p - \sqrt{3(11 - 16p)}) \end{cases} \xrightarrow{V_1=V_2} p = \frac{11}{16} \Rightarrow \begin{cases} V = (23 : 44 : -3) \\ M = (0 : 11 : 5) \end{cases}$$

Finalmente, para poder construir esta parábola, necesitamos construir, al menos, cinco de sus puntos:

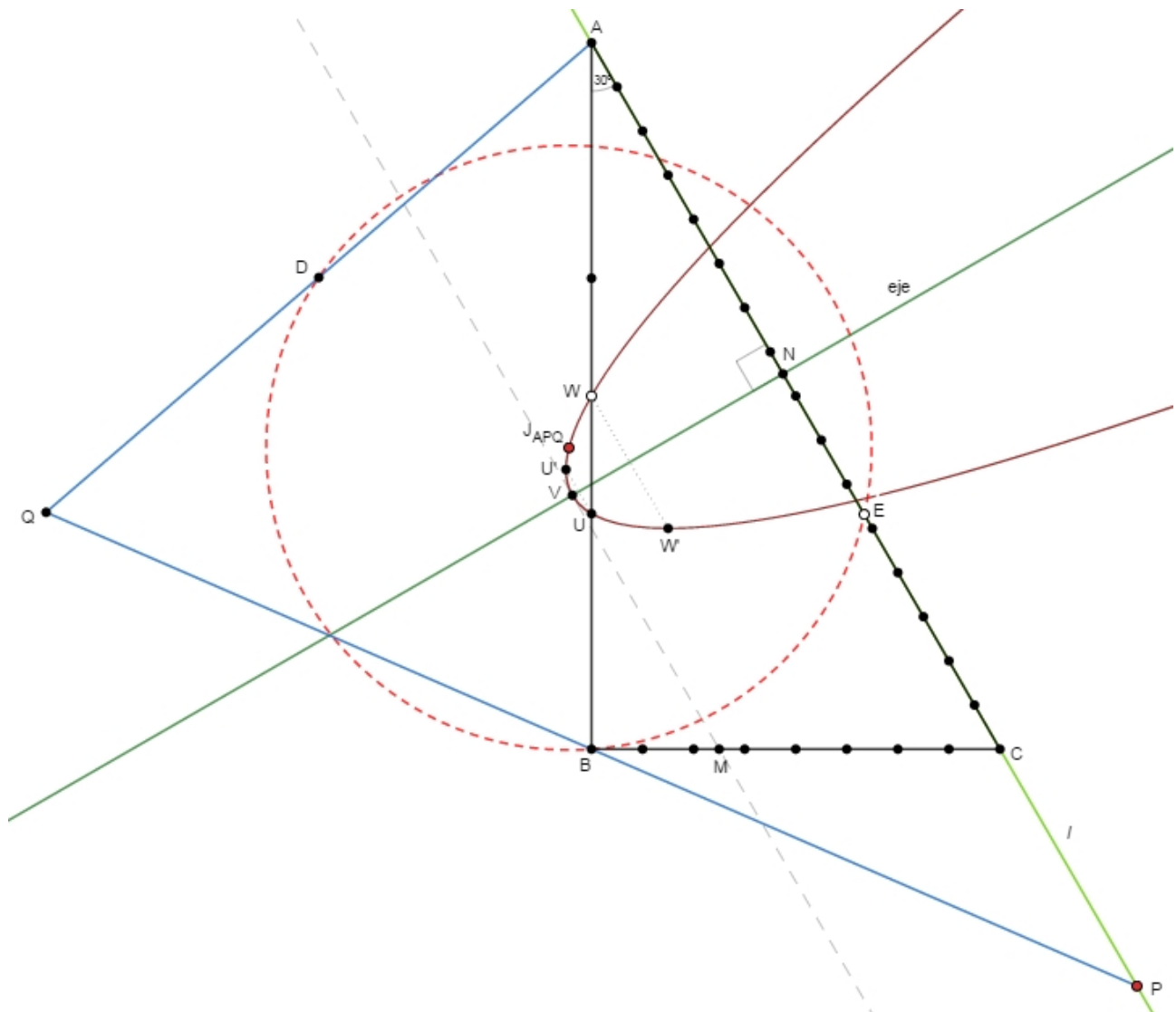
- ① Como la ecuación del eje de esta parábola es:

$$VT_{\infty} \equiv 15x - 9y - 17z = 0$$

entonces, su punto de intersección con la recta AC es $N = (17 : 0 : 15)$, es decir, el punto del segmento AC tal que $AN : NC = 15 : 17$ y, como $BM : MC = 5 : 11$, construyendo estos dos puntos y trazando la recta paralela a AC pasando por M y la recta perpendicular a AC pasando por N (eje de la parábola), obtenemos como intersección de ambas rectas el vértice V de la parábola.

- ② Esta parábola corta a la recta AB en el punto medio $W = (1 : 1 : 0)$ del segmento AB y en el punto $U = (1 : 2 : 0)$, es decir, en el punto del segmento AB tal que $AU : UB = 2 : 1$. Además, las reflexiones de estos puntos sobre el eje de la parábola nos proporcionan otros dos puntos U' y W' de ésta.

TRIÁNGULOS CABRI



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega