

Pr. Cabri 968

Enunciado

Dado un segmento AB, se considera una recta l que pasa por el punto A y forma un ángulo α con la recta AB. Si tomamos un punto P (distinto de A) sobre dicha recta y un punto Q tal que el punto B es el punto medio del segmento PQ, probar que el lugar de los centros de la circunferencia de Euler del triángulo APQ al variar P, es una parábola para todo valor del ángulo α . Determinar el (los) ángulo(s) α que hacen que dicha parábola y el segmento AB sean tangentes

Propuesto por Antonio Casas Pérez a raíz del P967 propuesto por M.A. Pérez García-Ortega.

Solución

de César Beade Franco

Tomemos A(0,0) y B(1,0) fijos. P(p,mp) está situado sobre la recta r: $y = mx$, es decir, $\angle \alpha = \angle BAP$ tiene tangente m. Q es el simétrico de P respecto a B y tiene coordenadas Q(2-p,-mp), es decir está situado sobre la recta s: $y = mx + 2m$, paralela a la anterior.

Una generalización del pr. 967.

Aquí $F\left(\frac{1}{4}(2 + 2c - c^2(1 + m^2)), \frac{2 + c^2(1 + m^2) - c(3 + m^2)}{4m}\right)$

Eliminando c obtenemos sus ecuaciones implícitas,

$O(x,y): 8x^2 + x(-10 + 2m^2 + 16my) - (-3 + m^2 + 12my - 8m^2y^2) = 0$.

Si calculamos sus invariantes, resultan ser parábolas con directrices $y = -\frac{1+9m^2}{16m} + mx$, paralelas a AP.

Intersecando estas parábolas con AB ($y=0$), se obtienen los puntos $\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{4}(3 - m^2), 0\right)$.

Coinciden cuando $m=\pm 1$, es decir, si $\beta = \pm 45^\circ$. En estos casos las parábolas son tangentes en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ a AB.