TRIÁNGULOS CABRI

<u>Problema 968.</u> (propuesto por Antonio Casas Pérez) Dado un segmento AB, se considera una recta l que pasa por el punto A y forma un ángulo β con la recta AB. Si tomamos un punto P (distinto de A) sobre dicha recta y un punto Q tal que el punto B es el punto medio del segmento PQ, probar que el lugar geométrico que describe el centro de la circunferencia de Euler del triángulo APQ cuando el punto P recorre la recta l es una parábola. ¿ Para qué valores del ángulo β dicha parábola es tangente a la recta AB ?.

<u>Solución:</u>

Considerando el punto C de la recta l tal que el triángulo ABC es rectángulo en B, resulta que:

$$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow \begin{cases} S_A = c^2 \\ S_B = 0 \\ S_C = a^2 \end{cases}$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, si $P = (t : 0 : 1-t)$ $(t \neq 1)$, entonces:

$$Q = (-t : 2 : t-1)$$

por lo que los puntos medios de los lados del triángulo APQ son:

$$\begin{cases} B = (0 : 1 : 0) \\ D = (1-t : 2 : -1+t) \\ E = (1+t : 0 : 1-t) \end{cases}$$

siendo la ecuación de la circunferencia de Euler del triángulo APQ (circunferencia circunscrita al triángulo BDE):

$$2[c^2xy + (a^2+c^2)xz + a^2yz] + [(t-1)(a^2(t-1) + c^2(t+1))x + (t+1)(a^2(t-2) + c^2t)z](x+y+z) = 0$$

cuyo centro es el punto:

$$J_{APQ} = (a^2(a^2(t-1)^2 + c^2 + c^2t^2) : -a^4(t-1)^2 + a^2c^2(3-2t)(t+1) - c^4t(1+t) : c^2t(a^2(t-1) + c^2(t+1)))$$

y eliminando los parámetros t y θ del siguiente sistema de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \theta a^2\left[a^2(t-1)^2 + c^2 + c^2t^2\right] \\ y = \theta - \left[a^4(t-1)^2 + a^2c^2(3-2t)(t+1) - c^4t(1+t)\right] \quad (\theta \neq 0, t \neq 1) \\ z = \theta c^2t[a^2(t-1) + c^2(t+1)] \end{cases}$$

obtenemos la ecuación de lugar geométrico que describe dicho circuncentro:

$$c^2(a^2 - 3c^2)x^2 - c^2(a^2+c^2)y^2 + (8a^4 + 5a^2c^2 + c^4)z^2 + 4c^4xy + 4c^2(3a^2+c^2)xz - 2c^2(3a^2+c^2)yz = 0$$

que corresponde a una parábola, ya que es una cónica no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 2c^2(a^2-3c^2) & 4c^4 & 4c^2(3a^2+c^2) \\ 4c^4 & -2c^2(a^2+c^2) & -2c^2(3a^2+c^2) \\ 4c^2(3a^2+c^2) & -2c^2(3a^2+c^2) & 2(8a^4+5a^2c^2+c^4) \end{vmatrix} = 64a^4c^4(a^2+c^2)^2 \neq 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

y tiene un único punto en la recta del infinito, cuyas coordenadas están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = x + y + z \\ 0 = c^2(a^2 - 3c^2)x^2 - c^2(a^2 + c^2)y^2 + (8a^4 + 5a^2c^2 + c^4)z^2 + 4c^4xy + 4c^2(3a^2 + c^2)xz - 2c^2(3a^2 + c^2)yz \end{cases}$$

siendo:

$$T_\infty = (a^2 : -a^2 - c^2 : c^2)$$

por lo que:

$$T_\infty \cdot CA_\infty = S_A a^2 - S_C c^2 = c^2 a^2 - a^2 c^2 = 0$$

y, por tanto, los diámetros de esta parábola son perpendiculares a la recta CA, lo cual significa que su directriz es paralela a dicha recta. Finalmente, como esta parábola corta a la recta AB en el punto medio $U = (1 : 1 : 0)$ del segmento AB y en el punto $V = (a^2 + c^2 : -a^2 + 3c^2 : 0)$, imponiendo que la parábola sea tangente a la recta AB, obtenemos que:

$$U = V \Rightarrow a^2 + c^2 = -a^2 + 3c^2 \Rightarrow a^2 = c^2 \Rightarrow a = c \Rightarrow b = \sqrt{2}\, c$$

por lo que $\beta = \frac{\pi}{4}$.