TRIÁNGULOS CABRI

<u>Problema 968.</u> (propuesto por Antonio Casas Pérez) Dado un segmento AB, se considera una recta l que pasa por el punto A y forma un ángulo β con la recta AB. Si tomamos un punto P (distinto de A) sobre dicha recta y un punto Q tal que el punto B es el punto medio del segmento PQ, probar que el lugar geométrico que describe el centro de la circunferencia de Euler del triángulo APQ cuando el punto P recorre la recta l es una parábola. ¿ Para qué valores del ángulo β dicha parábola es tangente a la recta AB ?. ¿ Para qué valores del ángulo β dicha parábola pasa por el punto A ?.

<u>Solución:</u>

① Considerando el punto C de la recta l tal que el triángulo ABC es rectángulo en B, resulta que:

$$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow \begin{cases} S_A = c^2 \\ S_B = 0 \\ S_C = a^2 \end{cases}$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, si $P = (t : 0 : 1-t)$ $(t \neq 1)$, entonces:

$$Q = (-t : 2 : t-1)$$

por lo que los puntos medios de los lados del triángulo APQ son:

$$\begin{cases} B = (0 : 1 : 0) \\ D = (1-t : 2 : -1+t) \\ E = (1+t : 0 : 1-t) \end{cases}$$

siendo la ecuación de la circunferencia de Euler del triángulo APQ (circunferencia circunscrita al triángulo BDE):

$$2[c^2xy + (a^2+c^2)xz + a^2yz] + [(t-1)(a^2(t-1) + c^2(t+1))x + (t+1)(a^2(t-2) + c^2t)z](x+y+z) = 0$$

cuyo centro es el punto:

$$J_{APQ} = \left(a^2\left(a^2(t-1)^2 + c^2(t^2+1)\right) : -a^4(t-1)^2 + a^2c^2(3-2t)(t+1) - c^4t(1+t) : c^2t(a^2(t-1) + c^2(t+1))\right)$$

y eliminando los parámetros t y θ del siguiente sistema de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \theta a^2\left[a^2(t-1)^2 + c^2(t^2+1)\right] \\ y = \theta - \left[a^4(t-1)^2 + a^2c^2(3-2t)(t+1) - c^4t(1+t)\right] \quad (\theta \neq 0, t \neq 1) \\ z = \theta c^2t[a^2(t-1) + c^2(t+1)] \end{cases}$$

obtenemos la ecuación de lugar geométrico que describe dicho circuncentro:

$$c^2(a^2-3c^2)x^2 - c^2(a^2+c^2)y^2 + (8a^4+5a^2c^2+c^4)z^2 + 4c^4xy + 4c^2(3a^2+c^2)xz - 2c^2(3a^2+c^2)yz = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

que corresponde a una parábola, ya que es una cónica no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 2c^2(a^2-3c^2) & 4c^4 & 4c^2(3a^2+c^2) \\ 4c^4 & -2c^2(a^2+c^2) & -2c^2(3a^2+c^2) \\ 4c^2(3a^2+c^2) & -2c^2(3a^2+c^2) & 2(8a^4+5a^2c^2+c^4) \end{vmatrix} = 64a^4c^4(a^2+c^2)^2 \neq 0$$

y tiene un único punto en la recta del infinito, cuyas coordenadas están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = x+y+z \\ 0 = c^2(a^2-3c^2)x^2 - c^2(a^2+c^2)y^2 + (8a^4+5a^2c^2+c^4)z^2 + 4c^4xy + 4c^2(3a^2+c^2)xz - 2c^2(3a^2+c^2)yz \end{cases}$$

siendo:

$$T_\infty = (a^2 : -a^2-c^2 : c^2)$$

por lo que:

$$T_\infty \cdot CA_\infty = S_A a^2 - S_C c^2 = c^2a^2 - a^2c^2 = 0$$

y, por tanto, los diámetros de esta parábola son perpendiculares a la recta CA, lo cual significa que su directriz es paralela a dicha recta.

② Como esta parábola corta a la recta AB en el punto medio $U = (1:1:0)$ del segmento AB y en el punto $L = (a^2+c^2 : -a^2+3c^2 : 0)$, imponiendo que la parábola sea tangente a la recta AB, obtenemos que:

$$U = L \Rightarrow a^2+c^2 = -a^2+3c^2 \Rightarrow a^2 = c^2 \Rightarrow a = c \Rightarrow \tan\beta = \frac{a}{c} = 1$$

por lo que $\beta = \frac{\pi}{4}$. En este caso, por razones de proporcionalidad, podemos suponer que el segmento AB tiene longitud unidad, por lo que:

$$\begin{cases} a = c = 1 \\ b = \sqrt{2} \end{cases}$$

y, por tanto, la ecuación de la parábola es:

$$x^2 + y^2 + 7z^2 - 2xy - 8xz + 4yz = 0$$

Además, si $M = (0 : p : 1-p)$ $(p \in \mathbb{R})$ es el punto de intersección de la recta tangente a la parábola en el punto V con la recta BC, entonces, la ecuación de dicha recta tangente (paralela a la recta AC pasando por el punto M) es:

$$MV \equiv px + (p-1)y + pz = 0$$

cuyos puntos de intersección con la parábola son:

$$\begin{cases} V_1 = \left(11-8p-\sqrt{9-16p} : 16p : 5-8p+\sqrt{9-16p}\right) \\ V_2 = \left(11-8p+\sqrt{9-16p} : 16p : 5-8p-\sqrt{9-16p}\right) \end{cases} \underset{V_1=V_2}{\Rightarrow} p = \frac{9}{16} \Rightarrow \begin{cases} V = (13:18:1) \\ M = (0:9:7) \end{cases}$$

Finalmente, para poder construir esta parábola, necesitamos construir, al menos, cinco de sus puntos:

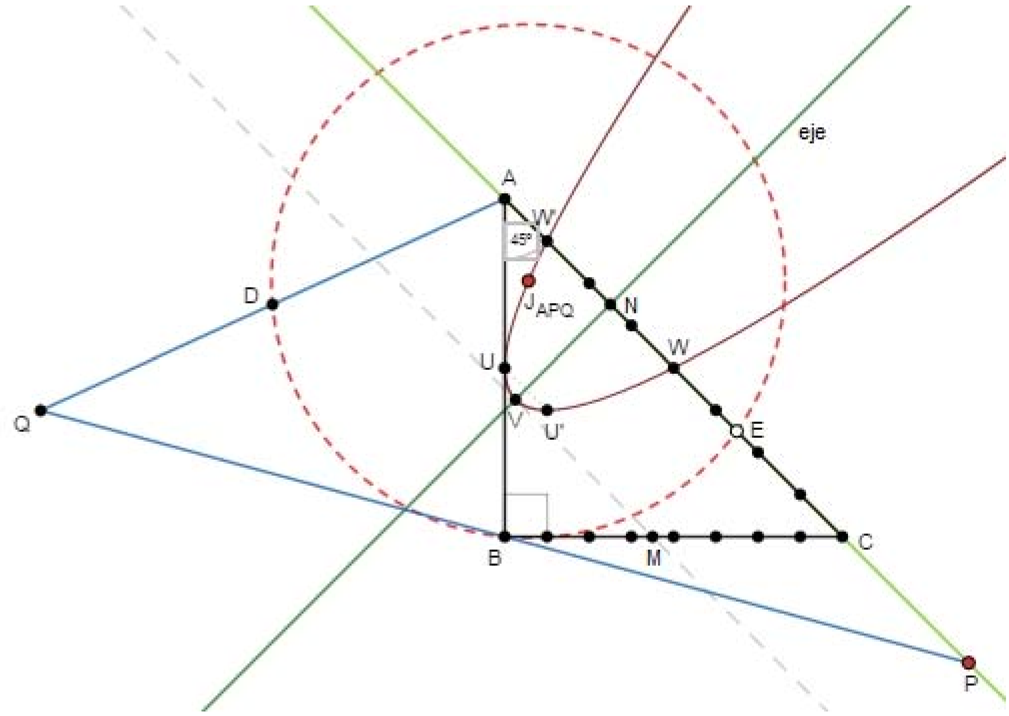
❶ Como $T_\infty = (1 : -2 : 1),$ entonces, la ecuación del eje de esta parábola es:

$$VT_\infty \equiv 5x - 3y - 11z = 0$$

por lo que su punto de intersección con la recta AC es $N = (11 : 0 : 5),$ es decir, el punto del segmento AC tal que $AN : NC = 5 : 11$ y, como $BM : MC = 7 : 9,$ construyendo estos dos puntos y trazando la recta paralela a AC pasando por M y la recta perpendicular a AC pasando por N (eje de la parábola), obtenemos como intersección de ambas rectas el vértice V de la parábola.

❷ Esta parábola es tangente a la recta AB en el punto medio $U = (1 : 1 : 0)$ del segmento $AB,$ por lo que también pasa por el punto U' simétrico del punto U respecto de su eje.

❸ Esta parábola corta a la recta CA en el punto medio $W = (1 : 0 : 1)$ del segmento CA y en el punto $W' = (7 : 0 : 1),$ simétricos uno del otro respecto de su eje.



③ Como esta parábola corta a la recta AB en el punto medio $U = (1 : 1 : 0)$ del segmento AB y en el punto $V = (a^2 + c^2 : -a^2 + 3c^2 : 0),$ imponiendo que la parábola pase por el punto $A,$ obtenemos que:

$$U = A \Rightarrow 0 = -a^2 + 3c^2 \Rightarrow a^2 = 3c^2 \Rightarrow a = \sqrt{3}\,c \Rightarrow \tan\beta = \frac{a}{c} = \sqrt{3}$$

por lo que $\beta = \frac{\pi}{3}.$ En este caso, por razones de proporcionalidad, podemos suponer que el segmento AB tiene longitud unidad, por lo que:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = \sqrt{3} \end{cases}$$

y, por tanto, la ecuación de la parábola es:

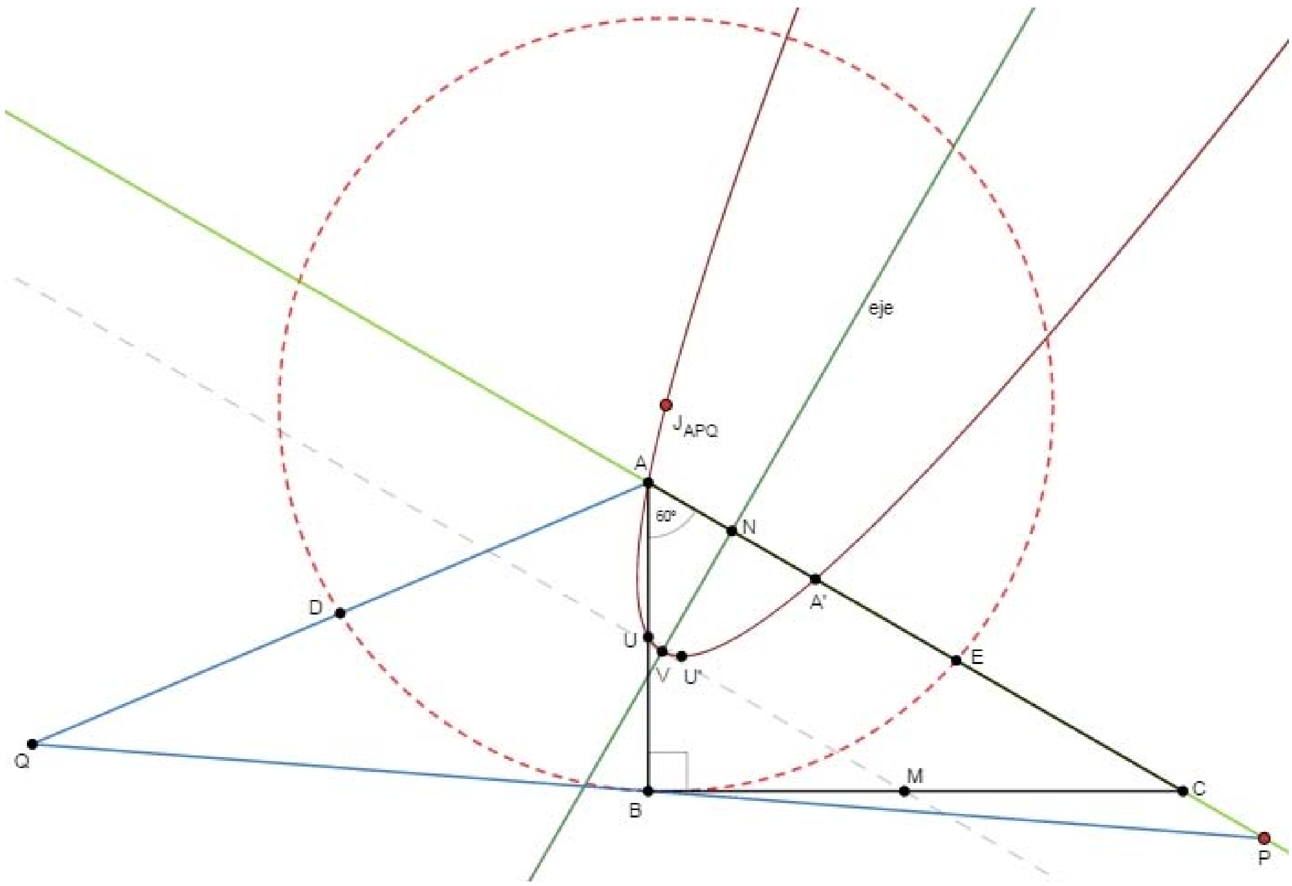
$$y^2 + 22z^2 - xy - 10xz + 5yz = 0$$

Además, si $M = (0 : p : 1-p)$ $(p \in \mathbb{R})$ es el punto de intersección de la recta tangente a la parábola en el punto V con la recta BC, entonces, la ecuación de dicha recta tangente (paralela a la recta AC pasando por el punto M) es:

$$MV \equiv px + (p-1)y + pz = 0$$

cuyos puntos de intersección con la parábola son:

$$\begin{cases} V_1 = \left(27 - 24p - \sqrt{25-48p} \; : 32p : 5 - 8p + \sqrt{9-16p}\right) \\ V_2 = \left(27 - 24p + \sqrt{25-48p} \; : 32p : 5 - 8p - \sqrt{9-16p}\right) \end{cases} \underset{V_1=V_2}{\Rightarrow} p = \frac{25}{48} \Rightarrow \begin{cases} V = (87 : 100 : 5) \\ M = (0 : 25 : 23) \end{cases}$$



Finalmente, para poder construir esta parábola, necesitamos construir, al menos, cinco de sus puntos:

❶ Como $T_\infty = (3 : -4 : 1)$, entonces, la ecuación del eje de esta parábola es:

$$VT_\infty \equiv 5x - 3y - 27z = 0$$

por lo que su punto de intersección con la recta AC es $N=(27:0:5)$, es decir, el punto del segmento AC tal que $AN:NC=5:27$ y, como $BM:MC=23:25$, construyendo estos dos puntos y trazando la recta paralela a AC pasando por M y la recta perpendicular a AC pasando por N (eje de la parábola), obtenemos como intersección de ambas rectas el vértice V de la parábola.

❷ Esta parábola corta a la recta AB en el punto medio $U=(1:1:0)$ del segmento AB y en el punto $A=(1:0:0)$, por lo que también pasa por sus respectivos puntos simétricos U' y A' respecto de su eje.