

Pr. Cabri 970

Enunciado

Dado un segmento AB, se considera una recta l que pasa por el punto A y forma un ángulo β con la recta AB. Si tomamos un punto P (distinto de A) sobre dicha recta y un punto Q tal que el punto B es el punto medio del segmento PQ, probar que el lugar geométrico que describe el circuncentro del triángulo APQ cuando el punto P recorre la recta l es una parábola. ¿ Para qué valores del ángulo β dicha parábola es tangente a la recta AB ?.

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega.

Solución

de César Beade Franco

Tomemos A(0,0) y B(1,0) fijos. P(p,mp) está situado sobre la recta r: $y = mx$, es decir, $\angle a = \angle BAP$ tiene tangente m. Q es el simétrico de P respecto a B y tiene coordenadas Q(2-p,-mp), es decir está situado sobre la recta s: $y = mx + 2m$, paralela a la anterior.

Una generalización de parte del pr. 966.

Aquí $O\left(\frac{1}{2}(2+c(-2+c+cm^2)), -\frac{(-1+c)(-2+c+cm^2)}{2m}\right)$

Eliminando c obtenemos sus ecuaciones implícitas,

$O(x,y): 1+m^2+2x^2-2my+2m^2y^2+x(-3-m^2+4my)=0$.

Si calculamos sus invariantes, resultan ser parábolas con directrices $y = \frac{1-7m^2}{8m} + mx$, paralelas a AP.

Intersecando estas parábolas con AB ($y=0$), se obtienen los puntos $(1, 0), \left(\frac{1}{2}(1+m^2), 0\right)$.

Coinciden cuando $m=\pm 1$, es decir, si $\beta = \pm 45^\circ$. En estos casos las parábolas son tangentes en $(1, 0)$ a AB.

Nota

Considerando conjuntamente las 3 parábolas (de los problemas 968, 969 y 970) para un determinado valor de m, podemos observar que sus directrices son paralelas (al lado AP) y los 3 focos están alineados siendo el correspondiente a la parábola generada por los centros de la circunferencia de Euler punto medio de los otros dos. En el dibujo vemos las parábolas correspondientes a $m=1$, tangentes todas a la mediana AB.

Out[317]=

