OPOSICIONES DE SECUNDARIA
EJERCICIOS

Ejercicio 3184. Dado un segmento AB, se considera una recta l que pasa por el punto A y forma un ángulo β con la recta AB. Si tomamos un punto P (distinto de A) sobre dicha recta y un punto Q tal que el punto B es el punto medio del segmento PQ, probar que el lugar geométrico que describe el circuncentro del triángulo APQ cuando el punto P recorre la recta l es una parábola. ¿ Para qué valores del ángulo β dicha parábola es tangente a la recta AB ?.

Solución:

① Considerando el punto C de la recta l tal que el triángulo ABC es rectángulo en B, resulta que:

$$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow \begin{cases} S_A = c^2 \\ S_B = 0 \\ S_C = a^2 \end{cases}$$

Además, considerando coordenadas baricéntricas con respecto a dicho triángulo, si $P = (t : 0 : 1-t)\ (t \neq 1)$, entonces:

$$Q = (-t : 2 : t-1)$$

por lo que el circuncentro del triángulo APQ es el punto:

$$O_{APQ} = (-a^2(t-1)(a^2(t-1)+c^2(t+1)) : (a^2+c^2)(a^2(t-1)^2+c^2t(t+1)) : -c^2t(a^2(t-1)+c^2(t+1)))$$

y eliminando los parámetros t y θ del siguiente sistema de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = -\theta a^2(t-1)[a^2(t-1)+c^2(t+1)] \\ y = \theta(a^2+c^2)\left[a^2(t-1)^2+c^2t(t+1)\right] \quad (\theta \neq 0, t \neq 1) \\ z = -\theta c^2 t[a^2(t-1)+c^2(t+1)] \end{cases}$$

obtenemos la ecuación de lugar geométrico que describe dicho circuncentro:

$$c^2(a^2+c^2)x^2 + 2a^2(a^2+c^2)z^2 + c^2(a^2-c^2)xy - c^2(a^2+c^2)xz + 2a^2c^2yz = 0$$

que corresponde a una parábola, ya que es una cónica no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 2c^2(a^2+c^2) & c^2(a^2-c^2) & -c^2(a^2+c^2) \\ c^2(a^2-c^2) & 0 & 2a^2c^2 \\ -c^2(a^2+c^2) & 2a^2c^2 & 4a^2(a^2+c^2) \end{vmatrix} = -4a^4c^4(a^2+c^2)^2 \neq 0$$

y tiene un único punto en la recta del infinito, cuyas coordenadas están determinadas por la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = x+y+z \\ 0 = c^2(a^2+c^2)x^2 + 2a^2(a^2+c^2)z^2 + c^2(a^2-c^2)xy - c^2(a^2+c^2)xz + 2a^2c^2yz \end{cases}$$

siendo:

$$T_\infty = (a^2 : -a^2-c^2 : c^2)$$

por lo que:

$$T_\infty \cdot CA_\infty = S_A a^2 - S_C c^2 = c^2 a^2 - a^2 c^2 = 0$$

y, por tanto, los diámetros de esta parábola son perpendiculares a la recta CA, lo cual significa que su directriz es paralela a dicha recta.

② Como esta parábola corta a la recta AB en el punto $B = (0 : 1 : 0)$ y en el punto $U = (-a^2 + c^2 : a^2 + c^2 : 0)$, imponiendo que la parábola sea tangente a la recta AB, obtenemos que:

$$U = B \Rightarrow 0 = -a^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = c^2 \Rightarrow a = c \Rightarrow \tan\beta = \frac{a}{c} = 1$$

por lo que $\beta = \frac{\pi}{4}$. En este caso, por razones de proporcionalidad, podemos suponer que el segmento AB tiene longitud unidad, por lo que:

$$\begin{cases} a = c = 1 \\ b = \sqrt{2} \end{cases}$$

y, por tanto, la ecuación de la parábola es:

$$x^2 + 2z^2 - xz + yz = 0$$

Además, si $M = (0 : p : 1 - p)\ (p \in \mathbb{R})$ es el punto de intersección de la recta tangente a la parábola en el punto V con la recta BC, entonces, la ecuación de dicha recta tangente (paralela a la recta AC pasando por el punto M) es:

$$MV \equiv px + (p - 1)y + pz = 0$$

cuyos puntos de intersección con la parábola son:

$$\begin{cases} V_1 = \left(5 - p + \sqrt{8p - 7} : 8p : 3 - 4p - \sqrt{8p - 7}\right) \\ V_2 = \left(5 - p - \sqrt{8p - 7} : 8p : 3 - 4p + \sqrt{8p - 7}\right) \end{cases} \underset{V_1 = V_2}{\Rightarrow} p = \frac{7}{8} \Rightarrow \begin{cases} V = (3 : 14 : -1) \\ M = (0 : 7 : 1) \end{cases}$$

Finalmente, para poder construir esta parábola, necesitamos construir, al menos, cinco de sus puntos:

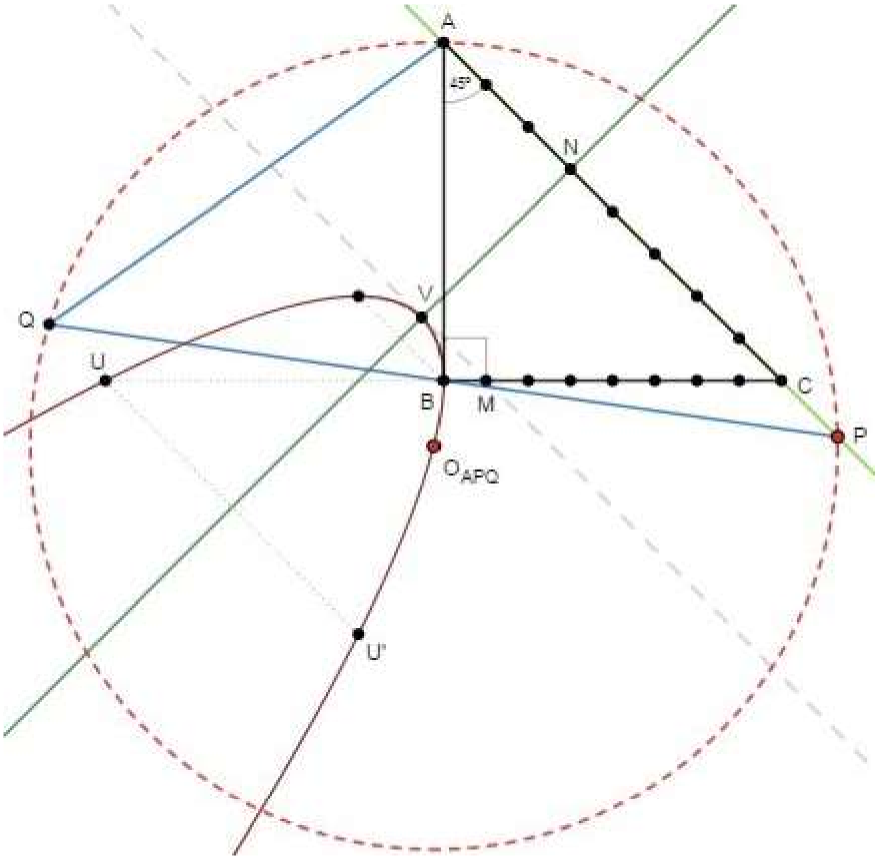
❶ Como $T_\infty = (1 : -2 : 1)$, entonces, la ecuación del eje de esta parábola es:

$$VT_\infty \equiv 3x - y - 5z = 0$$

por lo que su punto de intersección con la recta AC es $N = (5 : 0 : 3)$, es decir, el punto del segmento AC tal que $AN : NC = 3 : 5$ y, como $BM : MC = 1 : 7$, construyendo estos dos puntos y trazando la recta paralela a AC pasando por M y la recta perpendicular a AC pasando por N (eje de la parábola), obtenemos como intersección de ambas rectas el vértice V de la parábola.

❷ Esta parábola corta a la recta BC en el punto $B = (0 : 1 : 0)$ y en el punto $U = (0 : 2 : -1)$ simétrico del punto C respecto del punto B, por lo que también pasa por sus respectivos puntos simétricos B' y U' respecto de su eje.

OPOSICIONES DE SECUNDARIA
EJERCICIOS



EJERCICIOS FACEBOOK