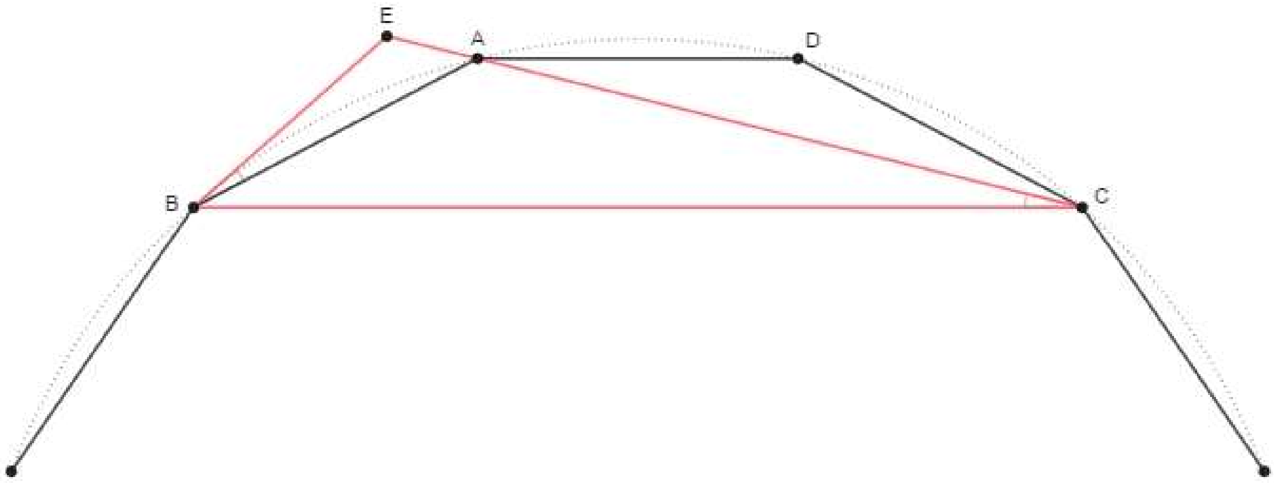
TRIÁNGULOS CABRI

Problema 972. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dados cuatro vértices consecutivos C, D, A y B de un polígono regular de trece lados, se considera el punto E situado sobre la recta CA y tal que $\measuredangle ABE = \measuredangle ACB$. Probar que los ángulos del triángulo BCE verifican que:

$$\cos B + \cos C + \cos E = \frac{\sqrt{13}+1}{4}$$



Solución:

Como el ángulo central del polígono regular de trece lados es $\frac{2\pi}{13}$, entonces:

$$\measuredangle ADC = 2\left(\frac{\pi - \frac{2\pi}{13}}{2}\right) = \frac{11\pi}{13} \Rightarrow \measuredangle CAD = \frac{\pi - \frac{11\pi}{13}}{2} = \frac{\pi}{13} \Rightarrow \measuredangle BAC = \frac{11\pi}{13} - \frac{\pi}{13} = \frac{10\pi}{13}$$

y como el cuadrilátero $ABCD$ es un trapecio isósceles, resulta que:

$$\pi = \measuredangle ADC + \measuredangle CBA = \frac{11\pi}{13} + \measuredangle CBA \Rightarrow \measuredangle CBA = \frac{2\pi}{13} \Rightarrow \measuredangle ACB = \frac{\pi}{13}$$

y, por tanto:

$$\left\{\begin{array}{l} \measuredangle ECB = \measuredangle ACB = \frac{\pi}{13} \\ \measuredangle CBE = \measuredangle CBA + \measuredangle ACB = \frac{3\pi}{13} \end{array}\right. \Rightarrow \measuredangle BEC = \pi - \frac{\pi}{13} - \frac{3\pi}{13} = \frac{9\pi}{13}$$

Tenemos, pues, que probar que:

$$¿\ \cos\left(\frac{9\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{13}\right) = \frac{\sqrt{13}+1}{4}\ ?$$

y, para ello, vamos a utilizar los polinomios de Chebyshev, definidos de forma recurrente por:

$$\left\{\begin{array}{c} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ \forall\ n \in \mathbb{N} \ / \ n \geq 2 : T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \end{array}\right.$$

y que tienen la siguiente propiedad:

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

① Como:

$$T_{13}(x) = x(4096x^{12} - 13312x^{10} + 16640x^8 - 9984x^6 + 2912x^4 - 364x^2 + 13)$$

y:

$$T_{13}\left[\cos\left(\frac{\pi}{13}\right)\right] = \cos(\pi) = -1$$

entonces, $\cos\left(\frac{\pi}{13}\right)$ es una raíz de la ecuación:

$$0 = T_{13}(x) + 1 = (x+1)(64x^6 - 32x^5 - 80x^4 + 32x^3 + 24x^2 - 6x - 1)^2$$

y de la ecuación:

$$64x^6 - 32x^5 - 80x^4 + 32x^3 + 24x^2 - 6x - 1 = 0$$

② Como:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{9\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{13}\right) &= -\cos\left(\frac{4\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{13}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{13}\right) \\ &= -T_4\left[\cos\left(\frac{\pi}{13}\right)\right] + T_3\left[\cos\left(\frac{\pi}{13}\right)\right] + \cos\left(\frac{\pi}{13}\right)\end{aligned}$$

y:

$$\begin{cases} T_3(x) = x(4x^2 - 3) \\ T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{cases}$$

considerando el polinomio:

$$p(x) = -T_4(x) + T_3(x) + x$$

resulta que:

$$\begin{aligned}[4p(x) - 1]^2 - 13 &= (32x^4 - 16x^3 - 32x^2 + 8x + 5)^2 - 13 \\ &= 4(4x^2 - 2x - 3)(64x^6 - 32x^5 - 80x^4 + 32x^3 + 24x^2 - 6x - 1)\end{aligned}$$

por lo que, en particular, para $x = \cos\left(\frac{\pi}{13}\right)$, se verifica que:

$$\left[4p\left[\cos\left(\frac{2\pi}{13}\right)\right] - 1\right]^2 - 13 = 0$$

es decir:

$$4p\left[\cos\left(\frac{2\pi}{13}\right)\right] - 1 = \sqrt{13}$$

ya que:

$$4p\left[\cos\left(\frac{\pi}{13}\right)\right]-1=4\left[-\cos\left(\frac{5\pi}{13}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{13}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{13}\right)\right]-1 \underset{\cos\left(\frac{3\pi}{13}\right)>\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}}{\overset{\cos\left(\frac{\pi}{13}\right)>\cos\left(\frac{5\pi}{13}\right)}{>}} 0$$

y, por tanto:

$$\frac{\sqrt{13}\;+1}{4}=p\left[\cos\left(\frac{\pi}{13}\right)\right]=\cos\left(\frac{9\pi}{13}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{13}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{13}\right)=\cos E+\cos B+\cos C$$