P973

Propuesto por M.A. Pérez

Dados un triángulo ABC y un punto P, se consideran los puntos D y J de intersección de la recta paralela a CA pasando por P con las rectas AB y BC, respectivamente, los puntos E y L de intersección de la recta paralela a BC pasando por P con las rectas AB y CA, respectivamente, y los puntos F y M de intersección de la recta paralela a AB pasando por P con las rectas BC y CA, respectivamente. Probar que existe una cónica que circunscribe al hexágono DEFJLM. Clasificar dicha cónica según la posición del punto P. ¿En qué casos el centro T de dicha cónica coincide con el punto P?

Solución (Propuesta por A.Casas)

Los puntos de cualquier paralela a un lado del triángulo, tienen la misma coordenada baricéntrica absoluta correspondiente a ese lado pues el área del triángulo que determinan con los extremos de ese lado es la misma.

Así, si r:s:t son las coordenadas baricéntricas absolutas de P, los puntos D,E,F,J,L,M

tienen como coordenadas E = r: 1- r: 0 ; L = r: 0: 1- r ; D = 1-s : s: 0 ; J = 0: s: 1-s ;

M = 1-t : 0: t ; F = 0: 1-t: t

Sea c la cónica que determinan los puntos E,L,D,J,M. Dicha cónica tendrá una ecuación en coordenadas baricéntricas homogéneas de la forma f(x,y,z)=0 que será un polinomio homogéneo de grado 2, esto es:

$$f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + gyz = 0$$

Sustituyendo las coordenadas de E,L,D.J,M tendremos el sistema homogéneo

$$ar^2 + b(1-r)^2 + dr(1-r) = 0$$

$$ar^2 + c(1-r)^2 + er(1-r) = 0$$

$$a(1-s)^2 + b * s^2 + ds(1-s) = 0$$

$$bs^2 + c(1-s)^2 + gs(1-s) = 0$$

$$a(1-t)^2 + ct^2 + et(1-t) = 0$$

Resolvemos el sistema y ponemos a=1 por homogeneidad y se tiene

$$f(x.y,z) = x^2 + \frac{r\,(-1+s)\,y^2}{s\,(-1+r)} + \frac{r\,(-1+t)\,z^2}{t\,(-1+r)} + \frac{(-r+2\,r\,s+1-s)\,x\,y}{s\,(-1+r)} + \frac{(-r+2\,r\,t+1-t)\,x\,z}{(-1+r)\,t} + \frac{r\,(2\,s\,t-s+1-t)\,y\,z}{s\,t\,(-1+r)} = 0$$

Y así

f(F) = f(0,1-t,t) =0

esto es, F pertenece a la cónica c.

La condición necesaria y suficiente para que a = b = c = d = e = g = 1 es que P tenga iguales sus coordenadas baricéntricas, esto es, P = 1/3:1/3:1/3 y P coincide con el baricentro de ABC.

En tal caso si M’ es el simétrico de M = x:y:z respecto del baricentro de ABC, tendremos M’ = 2/3 -x: 2/3 -y: 2/3 -z y si M pertenece la cónica c.

f(2/3 -x, 2/3 -y, 2/3 -z) =

$$\left(\frac{2}{3}-x\right)^2+\left(\frac{2}{3}-y\right)^2+\left(\frac{2}{3}-z\right)^2+\left(\frac{2}{3}-x\right)\left(\frac{2}{3}-y\right)+\left(\frac{2}{3}-x\right)\left(\frac{2}{3}-z\right)+\left(\frac{2}{3}-y\right)\left(\frac{2}{3}-z\right)=$$

$$x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+6*\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{8}{3}*(x+y+z)=0\,pues\;x+y+z=1$$

Esto es, el simétrico respecto al baricentro de todo punto de la cónica, está en la cónica y así centro de la cónica y baricentro coinciden. La condición para que centro de c y baricentro de ABC coincidan es que P sea tal baricentro.

La cónica c es una elipse cuando P está encerrado por la elipse de Steiner de ABC, una hipérbola (degenerada si P es A,B o C) cuando no lo está y una parábola cuando P pertenece a tal elipse.

La demostración que he encontrado de este último hecho es bastante analítica y utiliza resolución de ecuaciones que he hecho con un programa informático (Maple) por lo que quedo a la espera de una demostración más sencilla.

Básicamente, busco si c tiene puntos en el infinito y cuántos. Los puntos del infinito de c tienen coordenadas baricéntricas absolutas x: y: z: con x+y+z=0. Resuelvo pues el sistema f(x,y,z)=0 ; x+y+z=0. Obtengo como solución:

$$x=-\frac{1}{2}\,\frac{\left(r-t-s+\sqrt{t^2-2\,s\,t-2\,r\,t+s^2-2\,r\,s+r^2}\right)z}{t}-z$$

$$y=\frac{1}{2}\,\frac{\left(r-t-s+\sqrt{t^2-2\,s\,t-2\,r\,t+s^2-2\,r\,s+r^2}\right)z}{t}$$

$$z=z$$

Tal solución es real cuando el radicando sea positivo, compleja cuando sea negativo y doble cuando sea 0.

Como el radicando es una ecuación homogénea de 2º grado, los puntos P = r: s: t: recorren una cónica. Encontramos dicha cónica buscando 5 puntos y resulta ser la inelipse de Steiner de ABC. Para asegurar que es tal inelipse comprobamos que pasa por los puntos (0,1/2,1/2) , (1/2,0,1/2) y (1/2,1/2,0).