

Pr. Cabri 973

Enunciado

Dados un triángulo ABC y un punto P, se consideran los puntos D y J de intersección de la recta paralela a CA pasando por P con las rectas AB y BC, respectivamente, los puntos E y L de intersección de la recta paralela a BC pasando por P con las rectas AB y CA, respectivamente, y los puntos F y M de intersección de la recta paralela a AB pasando por P con las rectas BC y CA, respectivamente. Probar que existe una cónica que circunscribe al hexágono DEFJLM. Clasificar dicha cónica según la posición del punto P. ¿En qué casos el centro T de dicha cónica coincide con el punto P?

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega.

Solución

de César Beade Franco

Basta comprobarlo para un caso concreto pues las transformaciones afines conservan el paralelismo y la naturaleza de las cónicas. Tomamos un triángulo equilátero que también facilitará la respuesta a la segunda parte del problema. Sus vértices serán $A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(0,0)$ y $C(1,0)$. El punto $P(p,q)$.

Los puntos que determinan las paralelas por P son $D(\frac{1}{6}(3p + \sqrt{3}q), \frac{1}{2}(\sqrt{3}p + q))$, $E(\frac{q}{\sqrt{3}}, q)$, $F(p - \frac{q}{\sqrt{3}}, 0)$, $J(p + \frac{q}{\sqrt{3}}, 0)$, $L(1 - \frac{q}{\sqrt{3}}, q)$, $M(\frac{1}{6}(3 + 3p - \sqrt{3}q), \frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{3}p + q))$.

Podemos calcular la cónica por 5 de esos puntos y comprobar que el otro también la verifica. Tal ecuación resulta ser

$$(\sqrt{3}y^2 + 3(q(p-x)^2 - (p^2 + x - 2px)y) - q(q^2 - 3qy + 3y^2)) = 0 \quad (1).$$

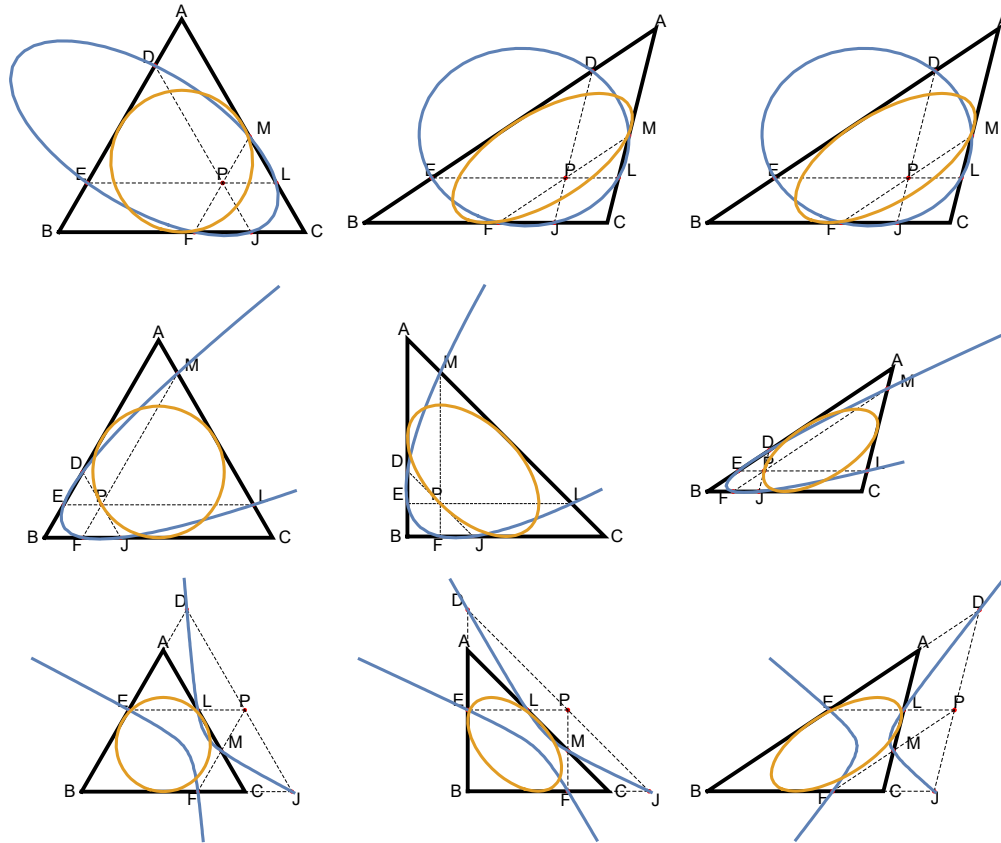
Su invariante afín es $IA = -\frac{9}{4} + 9p - 9p^2 + 3\sqrt{3}q - 9q^2 = -9(\frac{1}{4} - p + p^2 - \frac{q}{\sqrt{3}} + q^2)$.

Si la cónica no es degenerada será una parábola si este invariante se anula. Así pues cuando P está sobre la curva $-9(\frac{1}{4} - p + p^2 - \frac{q}{\sqrt{3}} + q^2) = 0$ la cónica es una parábola.

Esta ecuación, cambiando p por x y q por y, nos queda como $\frac{1}{4} - x + x^2 - \frac{y}{\sqrt{3}} + y^2 = 0$ que es la de la circunferencia inscrita al triángulo.

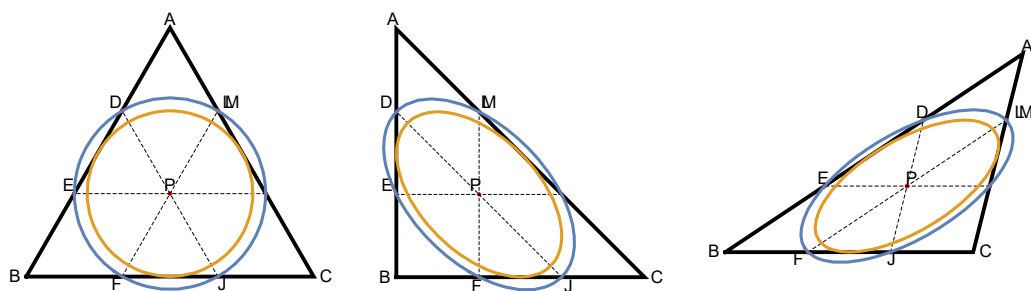
Así que $IA = -9 \cdot \text{Pot}(P)$ donde $\text{Pot}(P)$ es la potencia del punto P respecto a dicha circunferencia. Si P es interior a dicha circunferencia $\text{Pot}(P) < 0 \Rightarrow IA > 0$ y la cónica es una elipse. Y si P es exterior tenemos una hipérbola.

En un triángulo equilátero la circunferencia inscrita es la in-elipse de Steiner que no varía por una transformación afín, concluimos que para cualquier triángulo las cónicas así obtenidas serán elipses, parábolas o hipérbolas según P sea un punto interior, frontera o exterior a la in-elipse de Steiner.



Calculemos el centro de la cónica (1). Resulta ser $\left(\frac{3p^2(-1+2p)-4\sqrt{3}pq+3(1+2p)q^2}{3+12(-1+p)p-4\sqrt{3}q+12q^2}, \frac{6q((-1+p)p+q^2)}{3+12(-1+p)p-4\sqrt{3}q+12q^2} \right)$ igualándolo a (p,q) y resuelto obtenemos $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$, el baricentro que también permanece invariante para toda transformación afín.

La elipse resultante es homotética a la in-elipse de Steiner con centro P y razón de homotecia $\frac{2}{\sqrt{3}}$.



También nos podemos preguntar por la posición del punto para obtener una circunferencia. Resulta ser el punto de Lemoine K , que cumple la misma propiedad si desde él se trazan antiparalelas. En este último caso además el centro es K , lo que no sucede aquí, donde el centro Z es el punto medio entre P (Lemoine) y O .

