<u>Problema 973.</u> (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dados un triángulo ABC y un punto P, se consideran los puntos D y J de intersección de la recta paralela a CA pasando por P con las rectas AB y BC, respectivamente, los puntos E y L de intersección de la recta paralela a BC pasando por P con las rectas AB y CA, respectivamente, y los puntos F y M de intersección de la recta paralela a AB pasando por P con las rectas BC y CA, respectivamente. Probar que existe una cónica que circunscribe al hexágono $DEFJLM$. Clasificar dicha cónica según la posición del punto P. ¿ En qué casos el centro T de dicha cónica coincide con el punto P ?.

<u>Solución:</u>

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $P=(u:v:w)$ $(u,v,w\in\mathbb{R})$, entonces:

$$\left\{\begin{array}{l} DJ\equiv 0=vx-(u+w)y+vz \\ EL\equiv 0=(v+w)x-uy-uz \\ FM\equiv 0=wx+wy-(u+v)z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} D=(u+w:v:0) \\ E=(u:v+w:0) \\ F=(0:u+v:w) \\ J=(0:v:u+w) \\ L=(u:0:v+w) \\ M=(u+v:0:w) \end{array}\right.$$

siendo la ecuación de la cónica que pasa por los puntos D, E, F, J y L:

$$vw(v+w)x^2+uw(u+w)y^2+uv(u+v)z^2-w(w^2+2uv+uw+vw)xy-v(v^2+2uw+uv+vw)xz-u(u^2+2vw+uv+uw)xz=0$$

y, pudiéndose comprobar, por simple sustitución, que el punto M está situado sobre ella, por lo que esta cónica circunscribe al hexágono $DEFJLM$. Además:

① Como el determinante de su matriz asociada es:

$$\theta=2uvw(uv+uw+vw)(u+v+w)^4$$

entonces, esta cónica será degenerada cuando el punto P esté situado sobre alguna de las rectas que contienen a los lados del triángulo ABC o cuando el punto P esté situado sobre la cónica de ecuación:

$$xy+xz+yz=0$$

que es una elipse, pues su discriminante es $\Delta_{xy+xz+yz=0}=-\dfrac{3}{4}<0$, está centrada en el baricentro G del triángulo ABC y pasa por sus tres vértices (esta elipse recibe el nombre de "circunelipse de Steiner" del triángulo ABC).

② Como el discriminante de esta cónica es:

$$\Delta_{\text{cónica}}=\frac{(u+v+w)^4(u^2+v^2+w^2-2uv-2uw-2vw)}{4}$$

entonces:

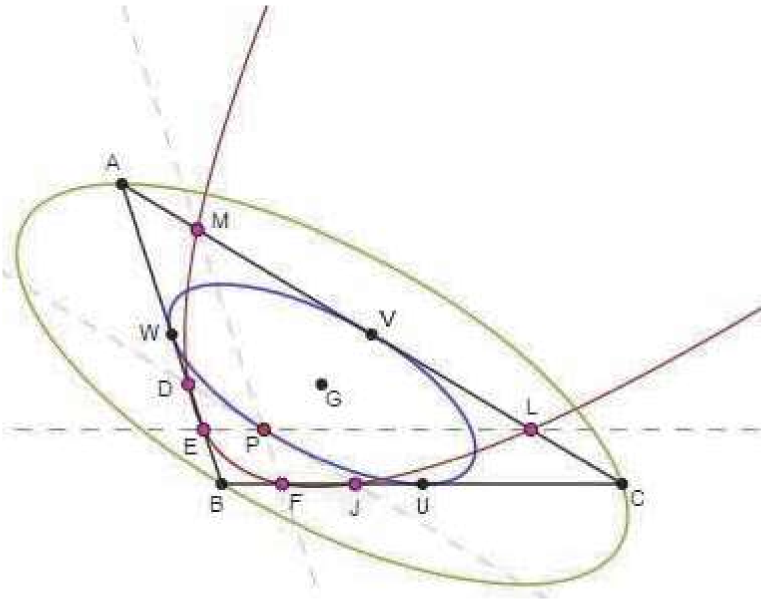
❶ Esta cónica será de tipo parabólico cuando el punto P esté situado sobre la cónica de ecuación:

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=0$$

que es una elipse, pues su discriminante es $\Delta_{x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz=0} = -12 < 0,$ está centrada en el baricentro G del triángulo ABC y pasa por sus los puntos medios:

$$\begin{cases} U = (0:1:1) \\ V = (1:0:1) \\ W = (1:1:0) \end{cases}$$

de sus tres lados, siendo dichos puntos medios puntos de tangencia con el lado correspondiente (esta elipse recibe el nombre de "inelipse de Steiner" del triángulo ABC). Además, si el punto P no es ninguno de los tres puntos de tangencia con los lados del triángulo $ABC,$ esta cónica será no degenerada, por lo que será una parábola:



y:

- ☺ Si el punto $P = W$ es el punto medio del lado $AB,$ esta cónica será degenerada, por lo que será un par de rectas paralelas, formado por la recta AB y la recta paralela a ella que pasa por los puntos medios U y V de los otros dos lados del triángulo $ABC.$

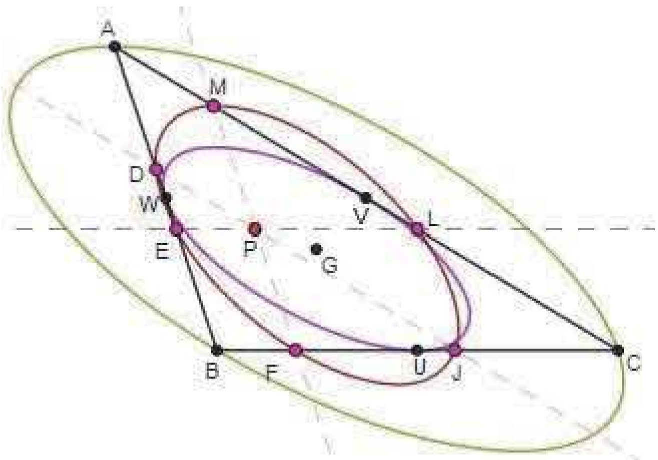
- 😐 Si el punto $P = U$ es el punto medio del lado $BC,$ esta cónica será degenerada, por lo que será un par de rectas paralelas, formado por la recta BC y la recta paralela a ella que pasa por los puntos medios V y W de los otros dos lados del triángulo $ABC.$

- ☹ Si el punto $P = V$ es el punto medio del lado $CA,$ esta cónica será degenerada, por lo que será un par de rectas paralelas, formado por la recta CA y la recta paralela a ella que pasa por los puntos medios U y W de los otros dos lados del triángulo $ABC.$

❷ Esta cónica será una elipse cuando:

$$u^2 + v^2 + w^2 - 2uv - 2uw - 2vw < 0$$

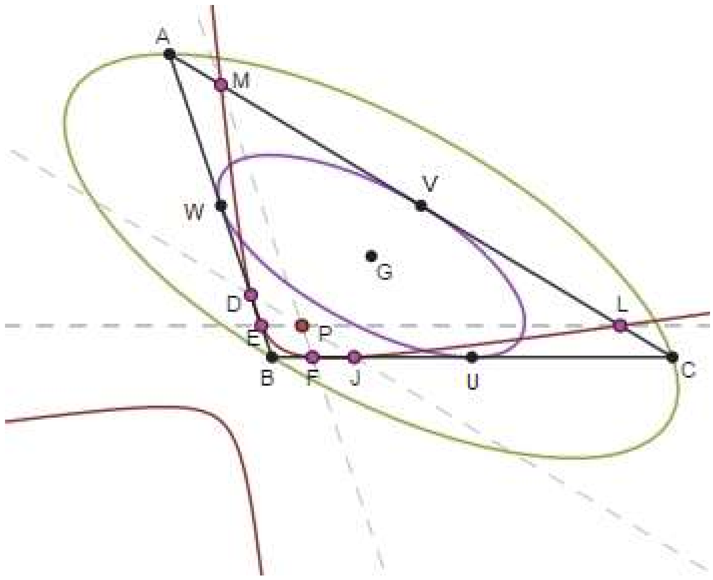
es decir, cuando el punto P esté situado en el interior de la inelipse de Steiner del triángulo ABC:



❸ Esta cónica será de tipo hiperbólico cuando:

$$u^2 + v^2 + w^2 - 2uv - 2uw - 2vw > 0$$

es decir, cuando el punto P esté situado en el exterior de la inelipse de Steiner del triángulo ABC. Además, si el punto P no está situado sobre ninguno de los tres lados del triángulo ABC ni sobre la circunelipse de Steiner de éste, esta cónica será no degenerada, por lo que será una hipérbola:



y:

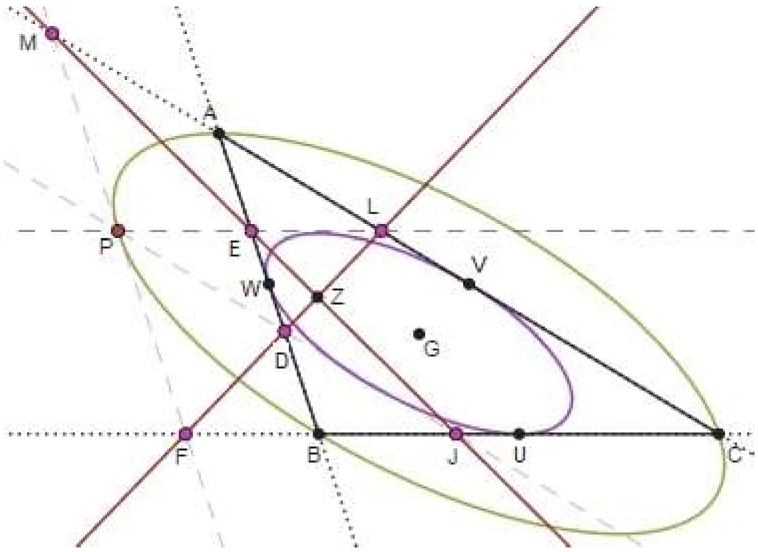
- Si el punto P está situado sobre el lado AB, esta cónica será degenerada, por lo que será un par de rectas secantes, formado por las rectas paralelas a BC y CA pasando por P.

- ✦ Si el punto P está situado sobre el lado BC, esta cónica será degenerada, por lo que será un par de rectas secantes, formado por las rectas paralelas a AB y CA pasando por P.

- ★ Si el punto P está situado sobre el lado CA, esta cónica será degenerada, por lo que será un par de rectas secantes, formado por las rectas paralelas a AB y BC pasando por P.

- ✶ Si el punto P está situado sobre la circunelipse de Steiner del triángulo ABC, esta cónica será degenerada, por lo que será un par de rectas secantes, cuya ecuación es:

$$\left[v(v+w)^2x - w^2(v+w)y + v^2wz\right]\left[w(v+w)^2x + vw^2y - v^2(v+w)z\right] = 0$$



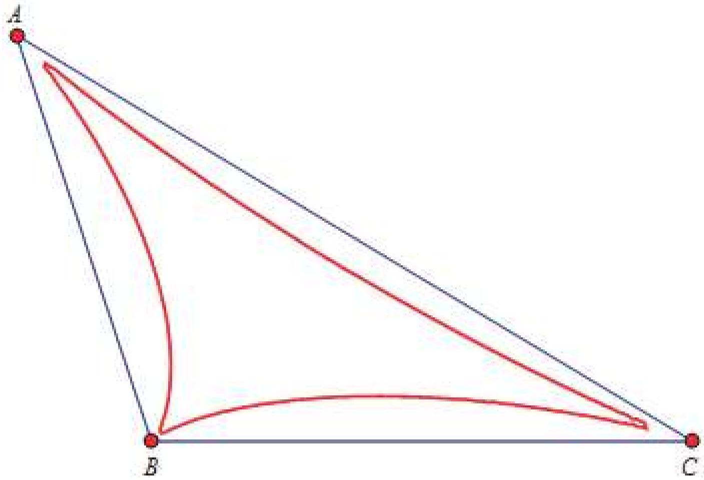
(como $u+v+w \neq 0$, entonces, $u+v \neq 0$, $u+w \neq 0$ ó $v+w \neq 0$, por lo que podemos suponer que $v+w \neq 0$), siendo su centro el punto:

$$Z = (v^2w^2 : v^2(v+w)^2 : w^2(v+w)^2) = (u^2 : v^2 : w^2)$$

que, al describir P la circunelipse de Steiner del triángulo ABC, describe la cuártica de ecuación:

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - 2x^2yz - 2xy^2z - 2xyz^2 = 0$$

que pasa por los tres vértices del triángulo ABC y cuya representación gráfica es:



Además:

- Si $P = A$, entonces, el par de rectas secantes está formado por las rectas AB y AC, siendo su centro el punto A.

- Si $P = B$, entonces, el par de rectas secantes está formado por las rectas BA y BC, siendo su centro el punto B.

- Si $P = C$, entonces, el par de rectas secantes está formado por las rectas CA y CB, siendo su centro el punto C.

- Si el punto P está alineado con los puntos medios $V = (1:0:1)$ y $W = (1:1:0)$ de los lados CA y AB, respectivamente, entonces:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ u & v & w \end{vmatrix} = u - v - w \Rightarrow u = v + w$$

por lo que el centro $Z = ((v+w)^2 : v^2 : w^2)$ del par de rectas secantes correspondiente está situado sobre la inelipse de Steiner (ya que sus coordenadas verifican la ecuación de ésta) y, además, está alineado con el punto medio $U = (0:1:1)$ del lado BC y con el punto P, pues:

$$\begin{vmatrix} (v+w)^2 & v^2 & w^2 \\ 0 & 1 & 1 \\ v+w & v & w \end{vmatrix} = 0$$

- Si el punto P está alineado con los puntos medios $W = (1:1:0)$ y $U = (0:1:1)$ de los lados BC y AB, respectivamente, entonces:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ u & v & w \end{vmatrix} = u - v + w \Rightarrow v = u + w$$

por lo que el centro $Z=(u^2:(u+w)^2:w^2)$ del par de rectas secantes correspondiente está situado sobre la inelipse de Steiner (ya que sus coordenadas verifican la ecuación de ésta) y, además, está alineado con el punto medio $V=(1:0:1)$ del lado CA y con el punto P, pues:

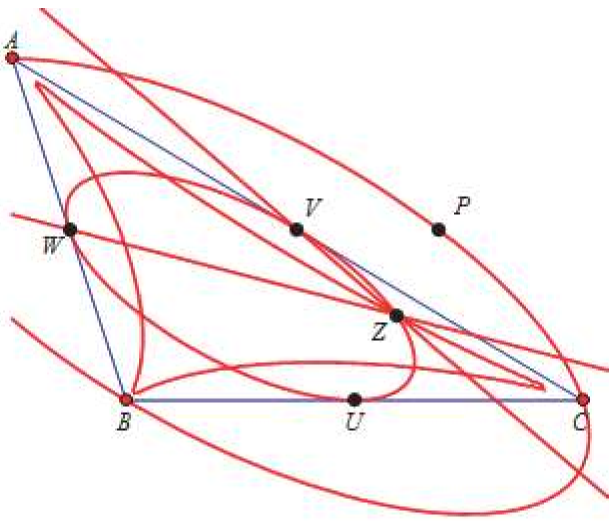
$$\begin{vmatrix} u^2 & (u+w)^2 & w^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ u & u+w & w \end{vmatrix} = 0$$

➀ Si el punto P está alineado con los puntos medios $U=(0:1:1)$ y $V=(1:0:1)$ de los lados BC y CA, respectivamente, entonces:

$$0=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ u & v & w \end{vmatrix} = u+v-w \Rightarrow w=u+v$$

por lo que el centro $Z=(u^2:v^2:(u+v)^2)$ del par de rectas secantes correspondiente está situado sobre la inelipse de Steiner (ya que sus coordenadas verifican la ecuación de ésta) y, además, está alineado con el punto medio $W=(1:1:0)$ del lado AB y con el punto P, pues:

$$\begin{vmatrix} u^2 & v^2 & (u+v)^2 \\ 1 & 1 & 0 \\ u & v & u+v \end{vmatrix} = 0$$



Finalmente, si el centro (conjugado de la recta del infinito) de esta cónica:

$$T=(-u(u^2-uv-uw-2vw):-v(-uv+v^2-2uw-vw):-w(-2uv-uw-vw+w^2))$$

coincidiese con el punto $P=(u:v:w)$, debería ocurrrir que:

$$(0,0,0)=(u,v,w)\times(-u(u^2-uv-uw-2vw),-v(-uv+v^2-2uw-vw),-w(-2uv-uw-vw+w^2))$$
$$(0,0,0)=(vw(v-w)(u+v+w),uw(w-u)(u+v+w),uv(u-v)(u+v+w))$$

por lo que:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = vw(v-w) \\ 0 = uw(w-u) \\ 0 = uv(u-v) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} P = A \\ \text{ó} \\ P = B \\ \text{ó} \\ P = C \\ \text{ó} \\ P = G \end{array}\right.$$

habiendo descrito anteriormente los tres primeros casos y, en el último caso, cuando $P = G,$ como el punto G es interior a la inelipse de Steiner del triángulo $ABC,$ esta cónica es una elipse, cuya ecuación es:

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 5xy - 5xz - 5yz = 0$$

y verifica que:

- Los puntos $D = (2:1:0)$ y $E = (1:2:0)$ dividen al segmento AB en tres partes iguales.
- Los puntos $F = (0:2:1)$ y $J = (0:1:2)$ dividen al segmento BC en tres partes iguales.
- Los puntos $L = (1:0:2)$ y $M = (2:0:1)$ dividen al segmento CA en tres partes iguales.