Debido al coronavirus, esta edición de *triánguloscabri* será del 16 de Enero al 28 de febrero de 2021.

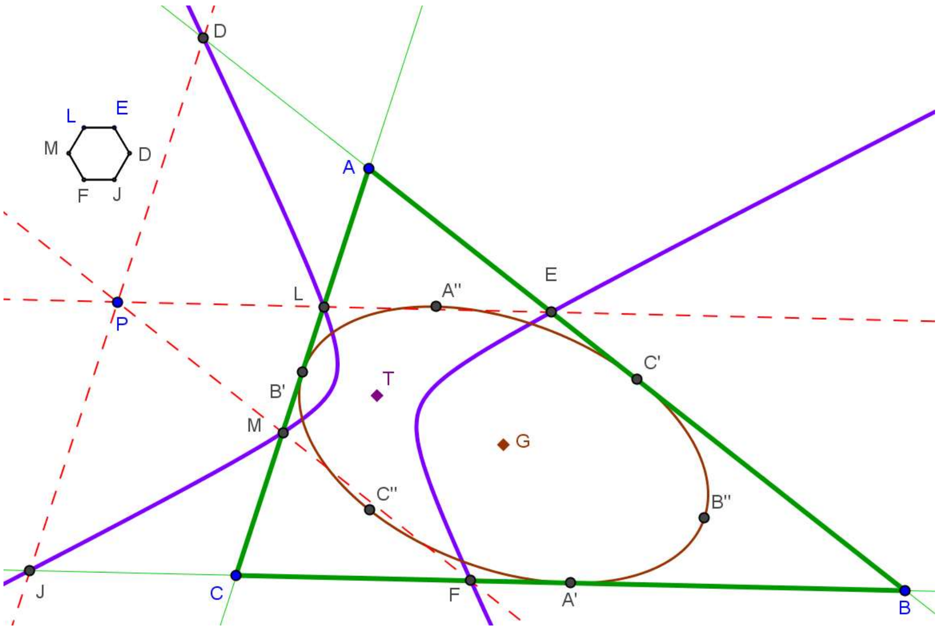
***Problema* 973.-** *Dados un triángulo ABC y un punto P, se consideran los puntos D y J de intersección de la recta paralela a CA pasando por P con las rectas AB y BC, respectivamente, los puntos E y L de intersección de la recta paralela a BC pasando por P con las rectas AB y CA, respectivamente, y los puntos F y M de intersección de la recta paralela a AB pasando por P con las rectas BC y CA, respectivamente. Probar que existe una cónica que circunscribe al hexágono $DEFJLM$. Clasificar dicha cónica según la posición del punto P. ¿En qué casos el centro T de dicha cónica coincide con el punto P?*

Pérez, M.A. (2020): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Existencia de la cónica y clasificación:

El hexágono $DELMFJ$ verifica el teorema de Pascal (sus lados opuestos son paralelos) y por tanto hay una cónica que pasa por esos vértices.

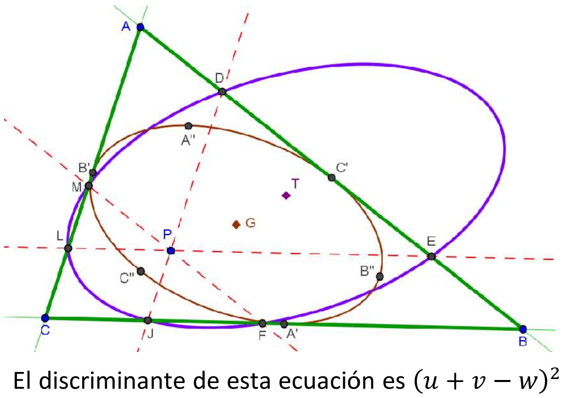


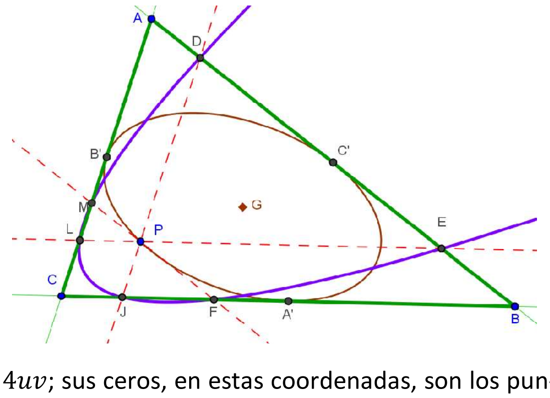
Para clasificar esta cónica en el caso general tomamos coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC. (Los detalles del cálculo se pondrán al final, para no hacer demasiado pesada la lectura).

Con $P(u{:}\,v{:}\,w)$ se obtiene una cónica de ecuación

$$-vw(u+v+w)[(v+w)x-u(y+z)]x \\ +[v(v+w)x+u(u+w)y-uvz][w(v+w)x-uwy+u(u+v)z]=0$$

de centro el punto T, y que en el infinito es $vx^2+(u+v-w)xy+uy^2=0$.

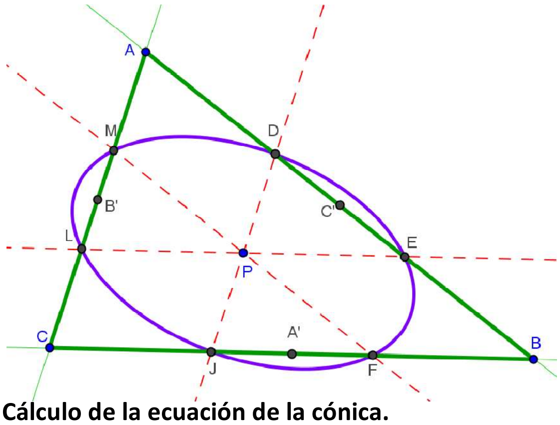




El discriminante de esta ecuación es $(u+v-w)^2-4uv$; sus ceros, en estas coordenadas, son los puntos de la **elipse de Steiner inscrita** en ABC que es tangente a los lados en los puntos medios y su centro es el baricentro.

Tendremos por tanto, elipses cuando P sea interior a la cónica de Steiner, hipérbolas cuando sea exterior y parábolas cuando esté sobre ella, como ilustran las figuras.

El centro de la cónica coincide con P cuando éste es el baricentro del triángulo.



El centro de la cónica coincide con el punto P cuando éste es el baricentro de ABC, como es fácil de demostrar. De las propiedades del baricentro los puntos L, M; D, E y F, J dividen en tres partes iguales los lados del triángulos. AD es un tercio de AB y AM un tercio de AC, de ahí que MD sea paralelo a BC y congruente con FJ. En resumen $MDFJ$ es un paralelogramo inscrito en la cónica y su centro (y también el de la cónica) es el baricentro.

Cálculo de la ecuación de la cónica.

Poniendo $P(u:v:w)$ y teniendo en cuenta los puntos del infinito de los lados $(1:-1:0)$; $(1:0:-1)$ y $(0:1:-1)$ si imponemos las condiciones del problema obtenemos las siguientes coordenadas:

$E(u:v+w:0); L(u:0:v+w); J(0:v:u+w); D(u+w:v:0); F(0:u+v:w); M(u+v:0:w)$.

Consideramos el cuadrilátero $ELJF$. Vamos a expresar las cónicas que pasan por sus vértices. Hacemos el producto de las rectas opuestas (paralelas) EL: $(v+w)x - u(y+z) = 0$ y JF $(x=0)$ y por otra parte el de las rectas opuestas JL: $v(v+w)x + u(u+w)y - uvz = 0$ y EF: $w(v+w)x - uwy + u(u+v)z = 0$.

La ecuación del haz de cónicas es $\lambda \cdot JF \cdot EL + JL \cdot EF = 0$. Con esto y el punto $M(u+v, 0, w)$ hallamos la ecuación de la cónica.

Obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} -vw(u+v+w)[(v+w)x - u(y+z)]x \\ + [v(v+w)x + u(u+w)y - uvz][w(v+w)x - uwy + u(u+v)z] = 0 \end{aligned}$$

Ahora hacemos $z = -x - y$ para quedarnos con los puntos del infinito. Después de operar se consigue para los puntos del infinito la ecuación $vx^2 + (u+v-w)xy + uy^2 = 0$.■