

Dado un triángulo ABC, y su medial C', B', A', en la recta AB se tienen los puntos M y N simétricos respecto a C'.

En la recta AC se tienen los puntos P y Q simétricos respecto a B'.

En la recta BC se tienen los puntos R y S simétricos respecto a A'.

Concretando casos.

a) Si los puntos son A(-4,0), B(4,0), C(2,6), M(-6,0), N(6,0), P(-5,-1), Q(3,7), R(5,-3), S(1,9), hallar la cónica que los contiene.

b) Si los puntos son A(-4,0), B(4,0), C(2,6), M(-6,0), N(6,0), P(-2,2), Q(0,4), R(5,-3), S(1,9), hallar la cónica que los contiene.

c)¿En qué casos la cónica que los contiene es una circunferencia?

Sea ABC un triángulo y (α, β, γ) coordenadas baricéntricas homogéneas de un punto $P = \alpha : \beta : \gamma$ de una cónica de ecuación baricéntrica $g(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. Tal ecuación será un polinomio homogéneo de segundo grado en α, β, γ y así, si $g(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, también será $g(\beta, \alpha, \gamma) = 0, \dots$ y toda permutación de α, β, γ .

Las coordenadas baricéntricas de dos puntos simétricos respecto al centro de un lado del triángulo ABC o su prolongación rectilínea son de la forma (a, b, c) con una de las coordenadas cero y las otras dos permutadas, por ejemplo $(0, b, c)$ y $(0, c, b)$ serían dos puntos del lado BC simétricos respecto a su centro.

La cónica determinada por los cinco puntos R, S, M, N, Q también contiene al punto P.

Las coordenadas baricéntricas absolutas de R, S, M, N, P, Q son:

$$R = 0 : r : 1-r$$

$$S = 0 : 1-r : r$$

$$M = m : 0 : 1-m$$

$$N = 1-m : 0 : m$$

$$P = p : 1-p : 0$$

$$Q = 1-p : p : 0$$

La ecuación de c en baricéntricas es

$$g(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$$

Sustituyendo las coordenadas de M, N, P, Q, R tendremos el sistema homogéneo

$$br^2 + c(1-r)^2 + fr(1-r) = 0$$

$$am^2 + c(1-m)^2 + em(1-m) = 0$$

$$a(1-m)^2 + cm^2 + e(1-m)m = 0$$

$$ap^2 + b(1-p)^2 + dp(1-p) = 0$$

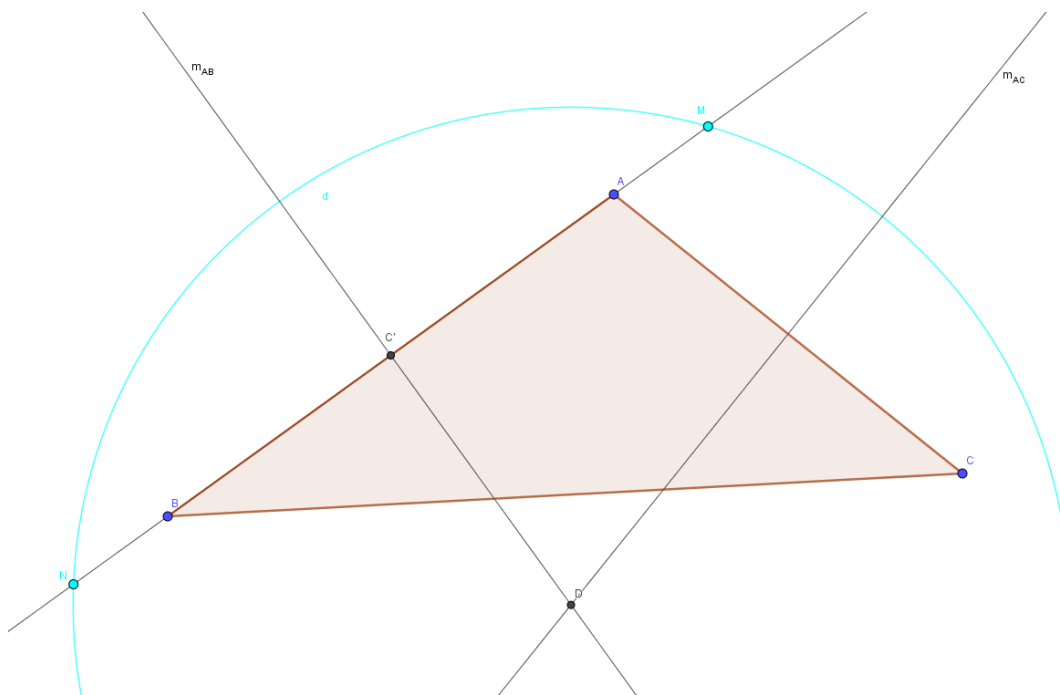
$$a(1-p)^2 + bp^2 + d(1-p)p = 0$$

Podemos suponer $c=1$ y queda

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{(-2p + 1 + 2p^2)xy}{(-1+p)p} + \frac{(2m^2 + 1 - 2m)xz}{m(-1+m)} + \frac{(2r^2 - 2r + 1)yz}{r(-1+r)} = 0$$

Así pues $g(1-p, p, 0) = 0$ y Q pertenece a c.

Dicha cónica es una circunferencia cuando los puntos M,P,R estén en una circunferencia cuyo centro sea el circuncentro de ABC pues en ese caso por simetría, M,N ; P,Q ; R,S estarán en tal circunferencia y como por otra parte determinan una única cónica, esta será la circunferencia determinada por M,P,R.



Cuando los puntos M,P,R coinciden con los puntos medios de los lados, la cónica que determinan con sus simétricos es tal que, como cada punto coincide con su simétrico, es una cónica que pasa por A',B',C' y tiene como tangentes en estos puntos, los lados de ABC. Es pues la inelipse de Steiner.

Aunque no lo pide el enunciado, sería conveniente clasificar el tipo de cónica que se obtiene según la posición de los puntos M,P,R.