

Pr. Cabri 974

Enunciado

Dado un triángulo ABC, y su medial C', B', A', en la recta AB se tienen los puntos M y N simétricos respecto a C'.

En la recta AC se tienen los puntos P y Q simétricos respecto a B'.

En la recta BC se tienen los puntos R y S simétricos respecto a A'.

Concretando casos.

a) Si los puntos son A(-4,0), B(4,0), C(2,6), M(-6,0), N(6,0), P(-5,-1), Q(3,7), R(5,-3), S(1,9), hallar la cónica que los contiene.

b) Si los puntos son A(-4,0), B(4,0), C(2,6), M(-6,0), N(6,0), P(-2,2), Q(0,4), R(5,-3), S(1,9), hallar la cónica que los contiene.

c) ¿En qué casos la cónica que los contiene es una circunferencia?

Propuesto por Barroso, R. (2021).

Solución

de César Beade Franco

Demostraremos que los puntos M, N, P, Q, R y S están sobre una cónica, comprobando que verifican el recíproco del teorema de Pascal, es decir que los puntos $X=MN \cap QR$, $Y=NP \cap RS$ y $Z=PQ \cap SM$ están alineados.

Consideremos el triángulo A(a,b), B(0,0) y C(1,0). A M, P y R les asignamos las abscisas u, v y w respectivamente. Con un poco de cálculo obtendríamos

$$M=(u,0), \quad N=(1-u,0), \quad P=(v, \frac{b(v-1)}{a-1}), \quad Q=(1+a-v, \frac{b(a-v)}{a-1}), \quad R=(w, \frac{bw}{a}) \quad y \\ S=(a-w, \frac{b}{a}(a-w)).$$

Las intersecciones de los 3 pares de rectas citados proporcionan los puntos

$$X=(\frac{w-v}{a^2+w-a(v+w)}, 0), \quad Y=(\frac{a(-1+u)(-1+v)}{1+(-1+a)u-v}, \frac{b(-1+u)(-1+v)}{1+(-1+a)u-v}) \quad y \\ Z=(\frac{a^2(-1+u)+uw+a(w-uw)}{a(-1+u)+w}, \frac{b(-1+u)(a-w)}{a(-1+u)+w}).$$

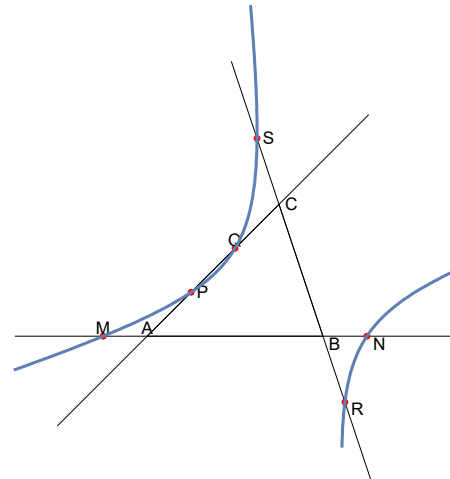
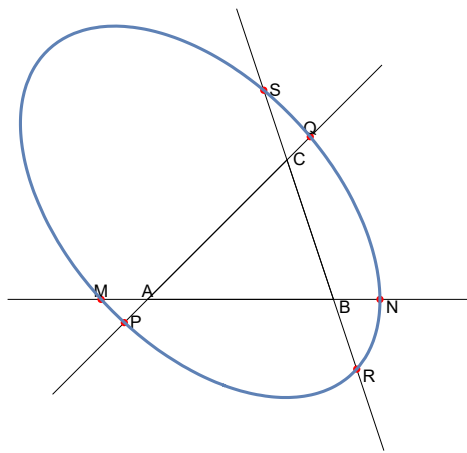
Para establecer su alineación comprobamos que $\text{Det}[X-Y, X-Z]=0$, lo que sucede.

a) y b) Las ecuaciones de estas cónicas son respectivamente (1)

$$-2268 + 63x^2 - 344xy + 58x + 59y^2 = 0 \quad y$$

$$-2592 + 72x^2 + 764y - 223xy - 29y^2 = 0.$$

Out[700]=



c) Una circunferencia que corte a un lado en dos puntos simétricos respecto a su punto medio ha de tener su centro situado en la mediatriz de ese lado. Así pues las únicas circunferencias que cumplen las condiciones del problema son las concéntricas a la circunscrita. O si se prefiere, los 6 puntos que determinan la cónica han de equidistar del circuncentro.

Notas

(1) Toda cónica viene dada por una ecuación de 2º grado de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, sin que a , b y c se anulen simultáneamente.

Llamando (x_i, y_i) $i = 1, \dots, 5$ a las coordenadas de los 5 puntos que definen la cónica y suponiendo que (x, y) son las coordenadas de cualquier otro punto de la cónica se obtiene el siguiente sistema que tiene como incógnitas los coeficientes a , b , c , d , e , f de la ecuación general:

$$ax_i^2 + bx_i y_i + cy_i^2 + dx_i + ey_i + f = 0, \quad i = 1, \dots, 5,$$

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

El sistema homogéneo tiene solución no trivial si la matriz de los coeficientes tiene determinante igual a 0.

$$\text{Det} \begin{bmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5 y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

El siguiente programa diseñado para "Mathematica" calcula estas cónicas. Funciona tanto con puntos en coordenadas cartesianas como homogéneas.

```
cfc[{a_, b_}] := {a^2, a * b, b^2, a, b, 1}
```

```
cfc[{a_, b_, c_}] := {a^2, a * b, b^2, a * c, b * c, c^2}
```

```
Conica5P[{p1_, p2_, p3_, p4_, p5_}, {x_, y_}] :=
```

```
Det[{ {x^2, x * y, y^2, x, y, 1}, cfc[p1], cfc[p2], cfc[p3], cfc[p4], cfc[p5] }]
```