Problema974.

Dado un triángulo ABC, y su medial C', B', A', en la recta AB se tienen los puntos M y N simétricos respecto a C'.

En la recta AC se tienen los puntos P y Q simétricos respecto a B'.

En la recta BC se tienen los puntos R y S simétricos respecto a A'.

Concretando casos.

a) Si los puntos son A(-4,0), B(4,0), C(2,6), M(-6,0), N(6,0), P(-5,-1), Q(3,7), R(5,-3), S(1,9), hallar la cónica que los contiene.

b) Si los puntos son A(-4,0), B(4,0), C(2,6), M(-6,0), N(6,0), P(-2,2), Q(0,4), R(5,-3), S(1,9), hallar la cónica que los contiene.

c)¿En què casos la cónica que los contiene es una circunferencia?

Barroso, R. (2021): Comunicación personal.

a) Resolviendo $ax^2 + b\,xy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ para los seis puntos obtenemos seis ecuaciones lineales en a , b , c , d , e y f

$36a - 6d + f = 0$
$36a + 6d + f = 0$
$25a + 5b + c - 5d - e + f = 0$
$9a + 21b + 49c + 3d + 7e + f = 0$
$25a - 15b + 9c + 5d - 3e + f = 0$
$a + 9b + 81c + d + 9e + f = 0$
de donde se tiene
$-63x^2 - 58xy - 59y^2 + 344y + 2268 = 0$

Su ecuación matricial es

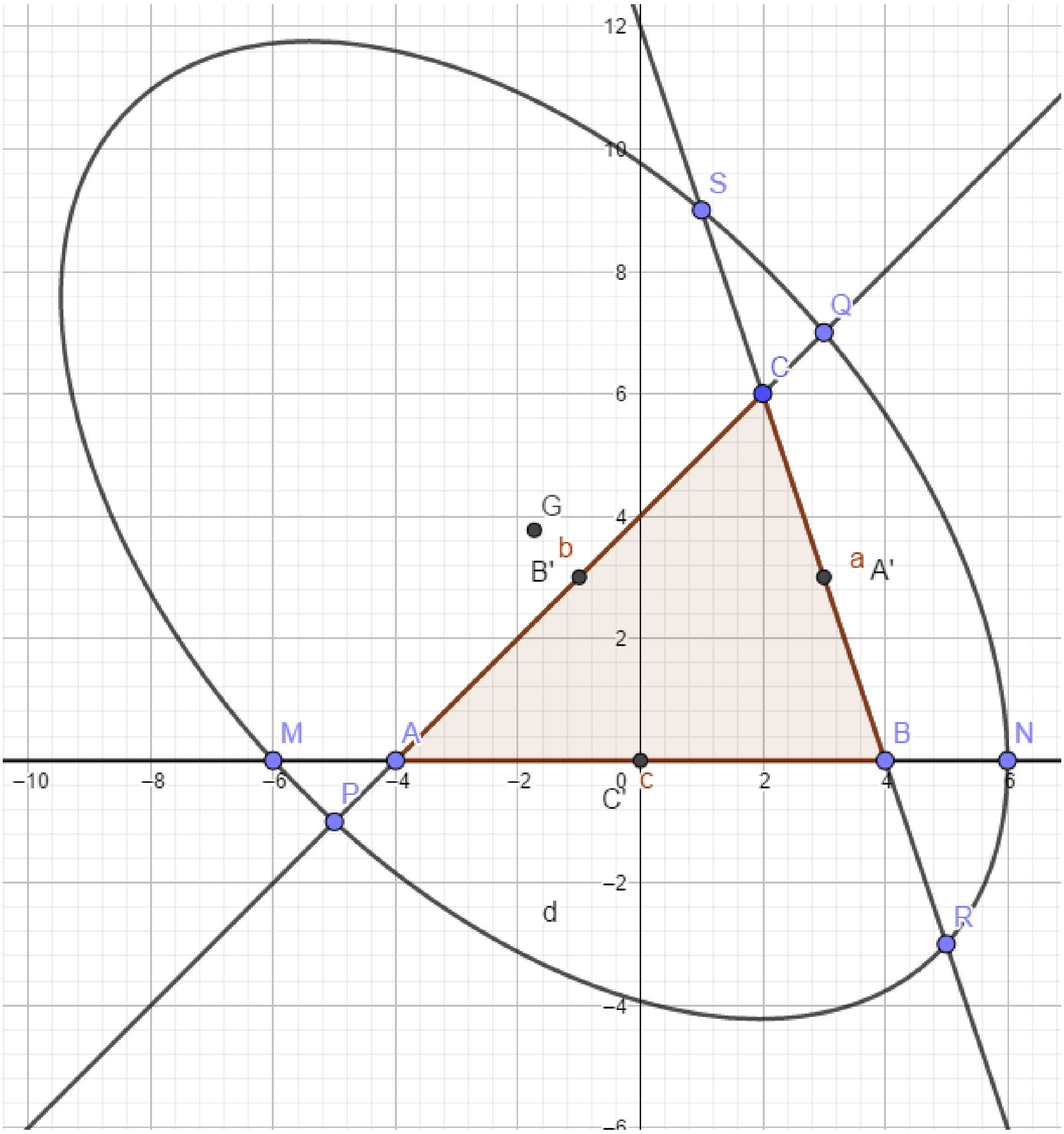
$$(x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} -63 & -29 & 0 \\ -29 & -59 & 172 \\ 0 & 172 & 2268 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Los valores de los determinantes son

$$M = \begin{vmatrix} -63 & -29 & 0 \\ -29 & -59 & 172 \\ 0 & 172 & 2268 \end{vmatrix} = 8386560$$

$$N = \begin{vmatrix} -63 & -29 \\ -29 & -59 \end{vmatrix} = 2876$$
A+C =-122

Por tanto es una elipse.



Busquemos el centro

Trazando una paralela a D(-6,0) E(6,0) por I(1,9), tenemos la recta y=9, que vuelve a cortar a la elipse en V(-65/7, 9)

Así el centro de la elipse está en la recta O(0,0) , T(-29/7 , 9), y=-63/29 x

Trazando una paralela a P(-5,-1) Q(3,7) por M(-6,0), tenemos la recta y=x+6, que vuelve a cortar la elipse en U(92/45, 362/45).

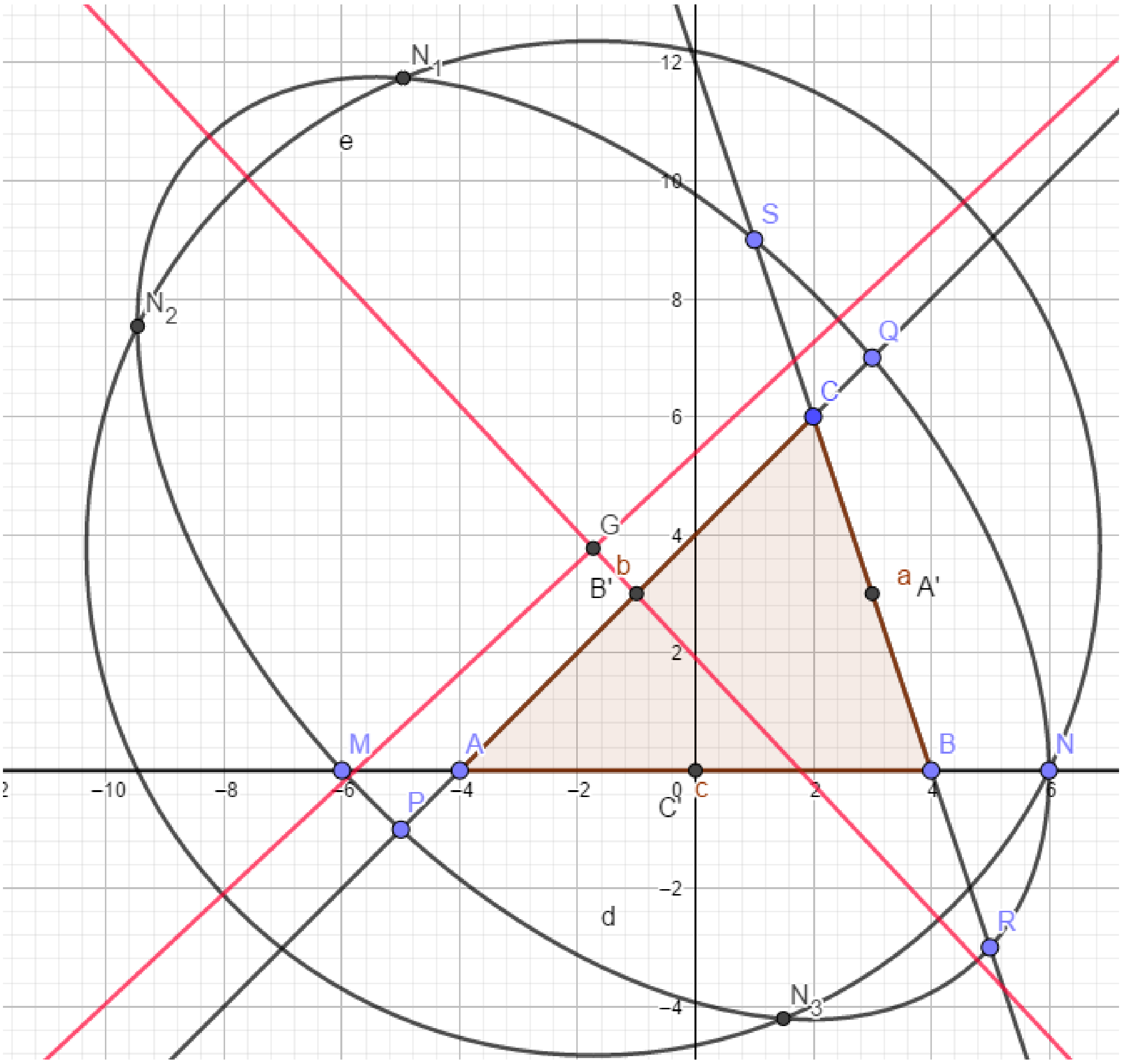
El centro de la elipse está situado también en la recta, que une los nuevos puntos medios, de P, Q que es V(-1,3), y de M, U, que es W(-89/45 , 181/45),

y=-23/22 x + 43/22

Así, el centro de la elipse está situado en

y=-63/29 x ∩ y=-23/22 x + 43/22 = $G(-\frac{1247}{719}, \frac{2709}{719})$

Si trazamos una circunferencia de centro G y radio GN, por ejemplo, cortará a la elipse en tres puntos más, N1 N 2 y N3



La ecuación de la circunferencia es

$x^2 + \frac{2494}{719}x + y^2 - \frac{5418}{719}y - \frac{40848}{719} = 0$.

La de la elipse es

-63 x^2 – 58 x y – 59 y^2 + 344y + 2268=0.

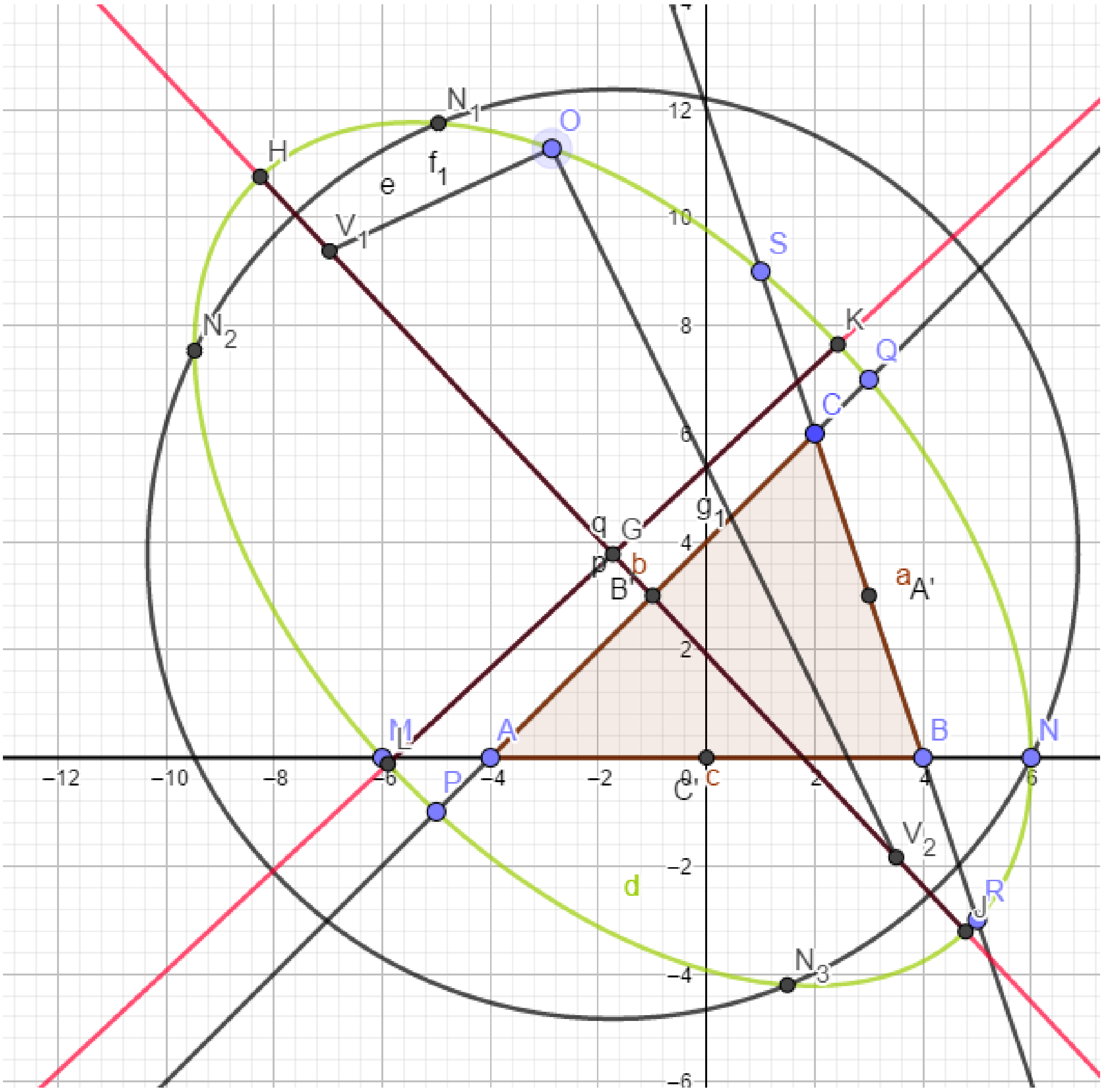
Continuando mediante el uso de Geogebra se obtienen con centésimas

N_1 (-4.76, 11,74), N_2(-9,47, 7,54), N_3(1,49,-4,21).

Siguiendo utilizando Geogebra obtenemos que los ejes están situados sobre las mediatrices de tales puntos, el eje mayor sobre y=-1,07x+1,91, siendo H(-8,26, 10,75) , J(4,79, 3,22) y el eje menor sobre y=-0,93x+5,39 siendo K(2,43, 7,65), L(-5,89, -0,11).

Los focos son V_1 (-6,97, 9,39), V_2(3,5, -1,84).

La suma de los radiovectores es 19,11



Advertencia: los nombres de los puntos no coinciden entre el texto y el gráfico de Geogebra en varias ocasiones.

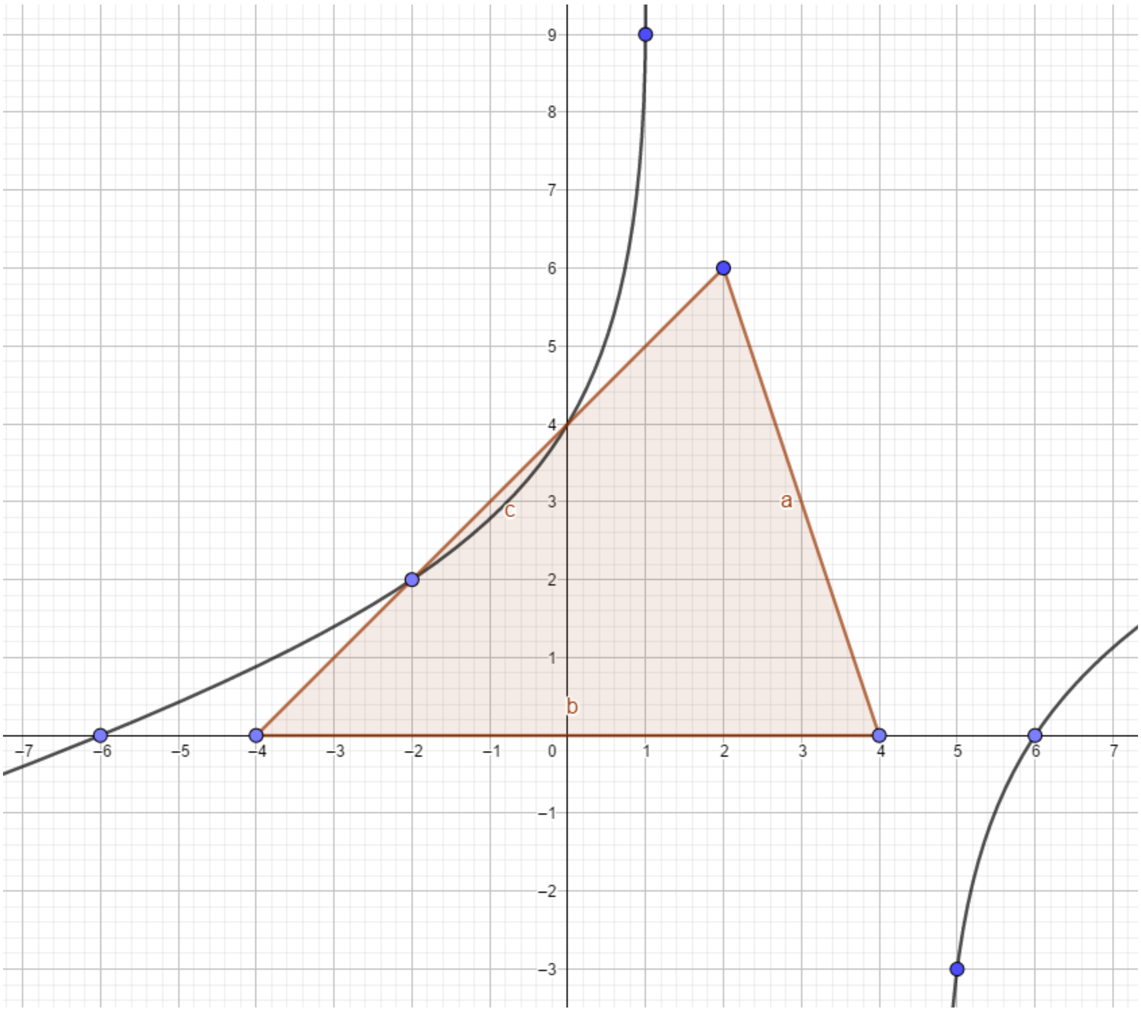
b)

Si los puntos son A(-4,0), B(4,0), C(2,6), M(-6,0), N(6,0), P(-2,2), Q(0,4), R(5,-3), S(1,9), hallar la cónica que los contiene.

Resolviendo $ax^2 + b\,xy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ para los seis puntos obtenemos seis ecuaciones lineales en a , b , c , d , e y f

36a - 6d + f=0
36a + 6d + f=0
4a -4b + 4c -2d +2 e + f=0
16c + 4e + f=0
25a - 15b + 9c + 5d – 3e + f=0
a + 9b +81c + d + 9e +f=0
de donde se tiene

72 x^2 -223 xy – 29 y^2 + 764 y -2592=0



En este caso la ecuación matricial es

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 72 & -111.5 & 0 \\ -111.5 & -29 & 382 \\ 0 & 382 & -2592 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Tenemos

$$M = \begin{vmatrix} 72 & -111.5 & 0 \\ -111.5 & -29 & 382 \\ 0 & 382 & -2592 \end{vmatrix} = 27129960$$

Y la matriz

$$N = \begin{vmatrix} 72 & -111.5 \\ -11.5 & -29 \end{vmatrix} = \frac{-58081}{4}$$

Por tanto en este caso es una hipérbola.

Estudiemos sus elementos

Tomemos M(-6,0), N (6,0) cuyo punto medio es O(0,0)

La paralela por P (-2,2) es y=2, y corta a la hipérbola por segunda vez en P'(295/36,2), resolviendo el sistema de ecuaciones

y=2

72 x^2 -223 xy – 29 y^2 + 764 y -2592=0

El punto medio de PP' es P_1 (223/72,2).

La recta OP_1 es y=144/223 x y debe contener el centro de la hipérbola.

Tomemos ahora los puntos N(6,0) y Q(0,4)

Su punto medio es T(3,2).

La paralela a la recta NQ por M(-6,0) es y=-2/3 x-4.

El nuevo punto de corte de tal recta con la hipérbola se obtiene al resolver el sistema de ecuaciones

y=-2/3 x-4

72 x^2 -223 xy – 29 y^2 + 764 y -2592=0

Que es $M'(\frac{4584}{935}, -\frac{6796}{935})$

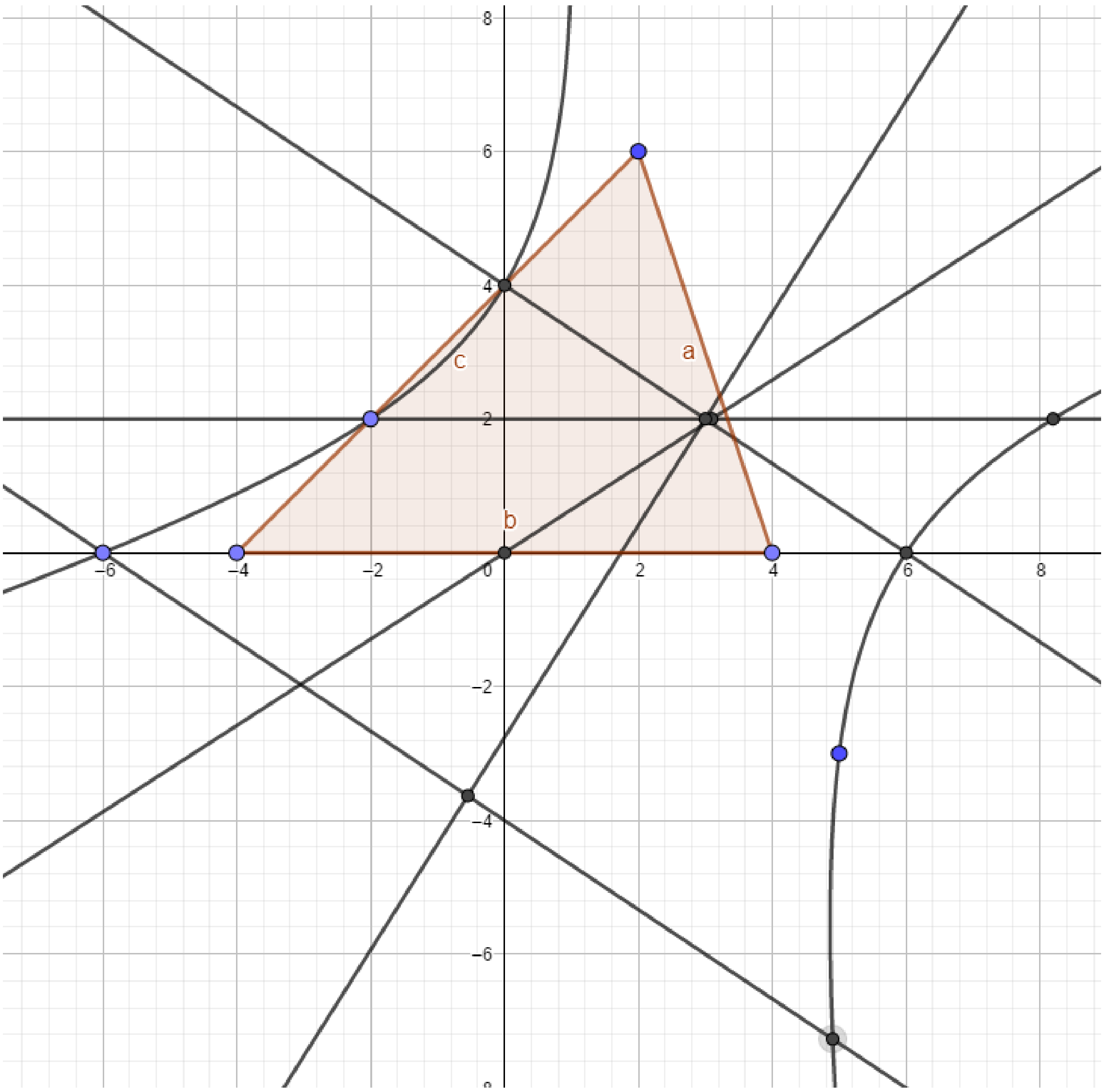
El punto medio de M y M' es $M_1(-\frac{513}{935}, -\frac{3398}{935})$

La recta que contiene a T y M_1

Que es

$y = \frac{5268}{3318}x - \frac{5268}{3318}$ también debe contener al centro de la hipérbola. Así resolviendo ambas ecuaciones el centro está en

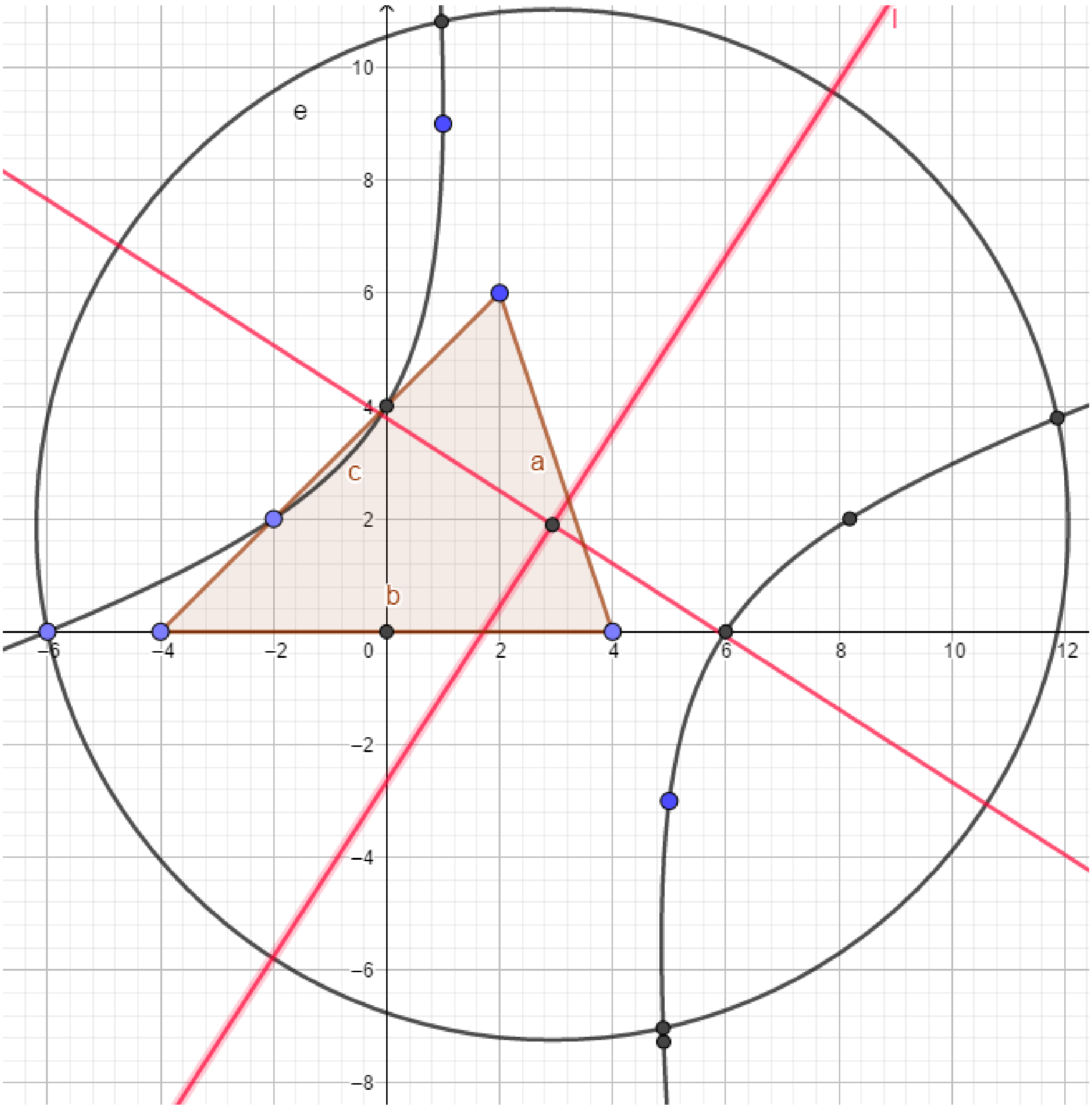
$(U(\frac{170372}{58081}, \frac{110016}{58081})$



A partir de ahora consideraré los valores aproximados de Geogebra.
Tomamos la circunferencia de centro U y radio UM
Es: $x^2 + y^2 - 5.87x - 3.79y = 71.2$

La intersección con la hipérbola nos da los puntos
M(-6,0) ,A_1(0,97, 10,81) , A_2 (11.87 , 3.79) A_3 (4.89, -7.02)

Las mediatrices de estos puntos dan la obtención de los ejes:
$y=1.55x-2.65$
$y=-0.64x+3.79$
Los dos vértices están en V_1 (-0.09, 3.85) y V_2 (5.96,-0.06) La diferencia de los radiovectores es 7.21.



Busquemos los focos, siguiendo a (Tratado Geométrico, González, y Palencia , 1992, pag 256)

La circunferencia de centro U y radio UV_1 es

$x^2+y^2- 5.87x-3.79y=0.79$.

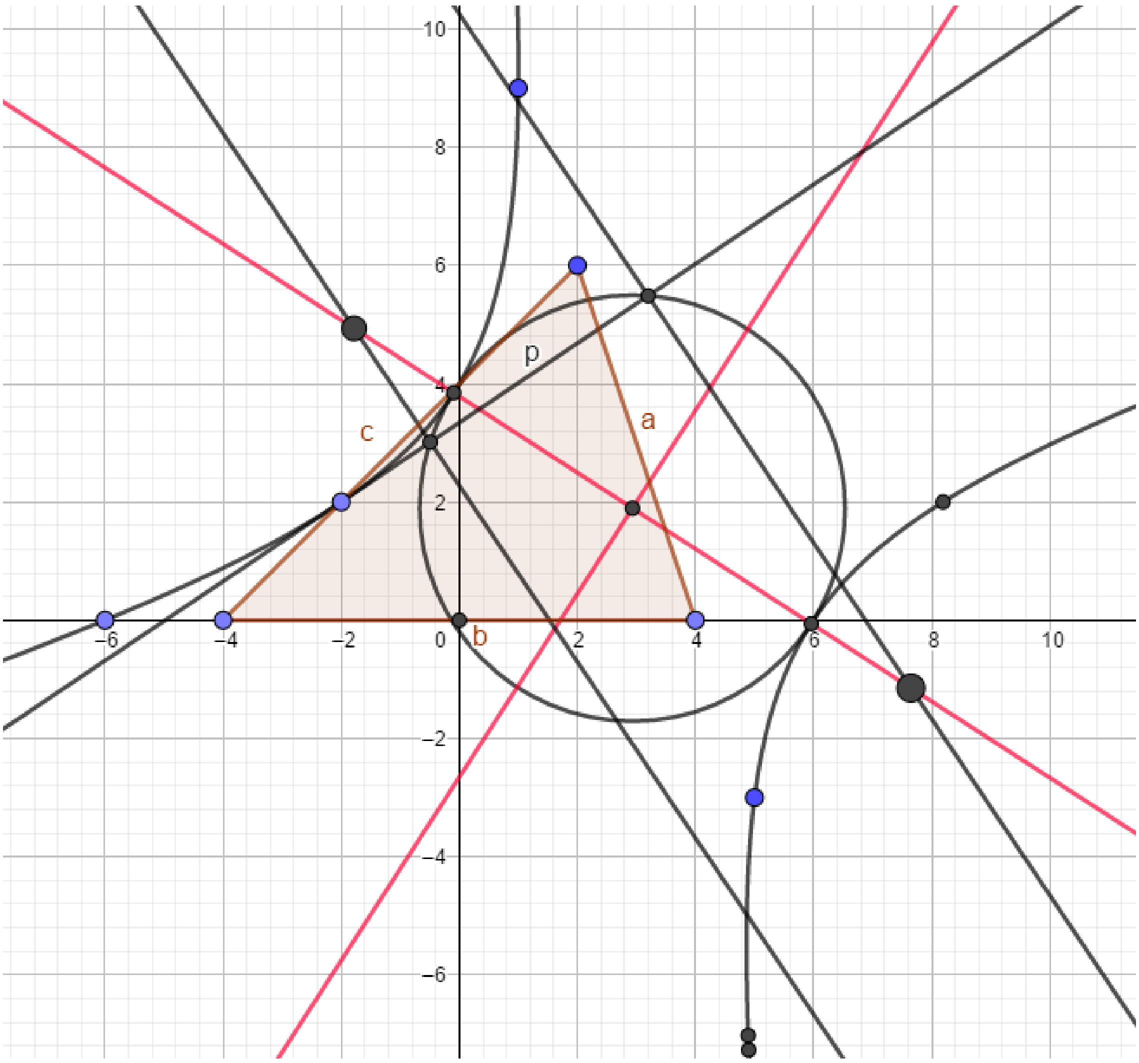
Tomemos por ejemplo, la tangente a la hipérbola por (-2,2) que es y=0.67x+3.34.

Corta a la circunferencia anterior en V_1 (3.2, 5.49).

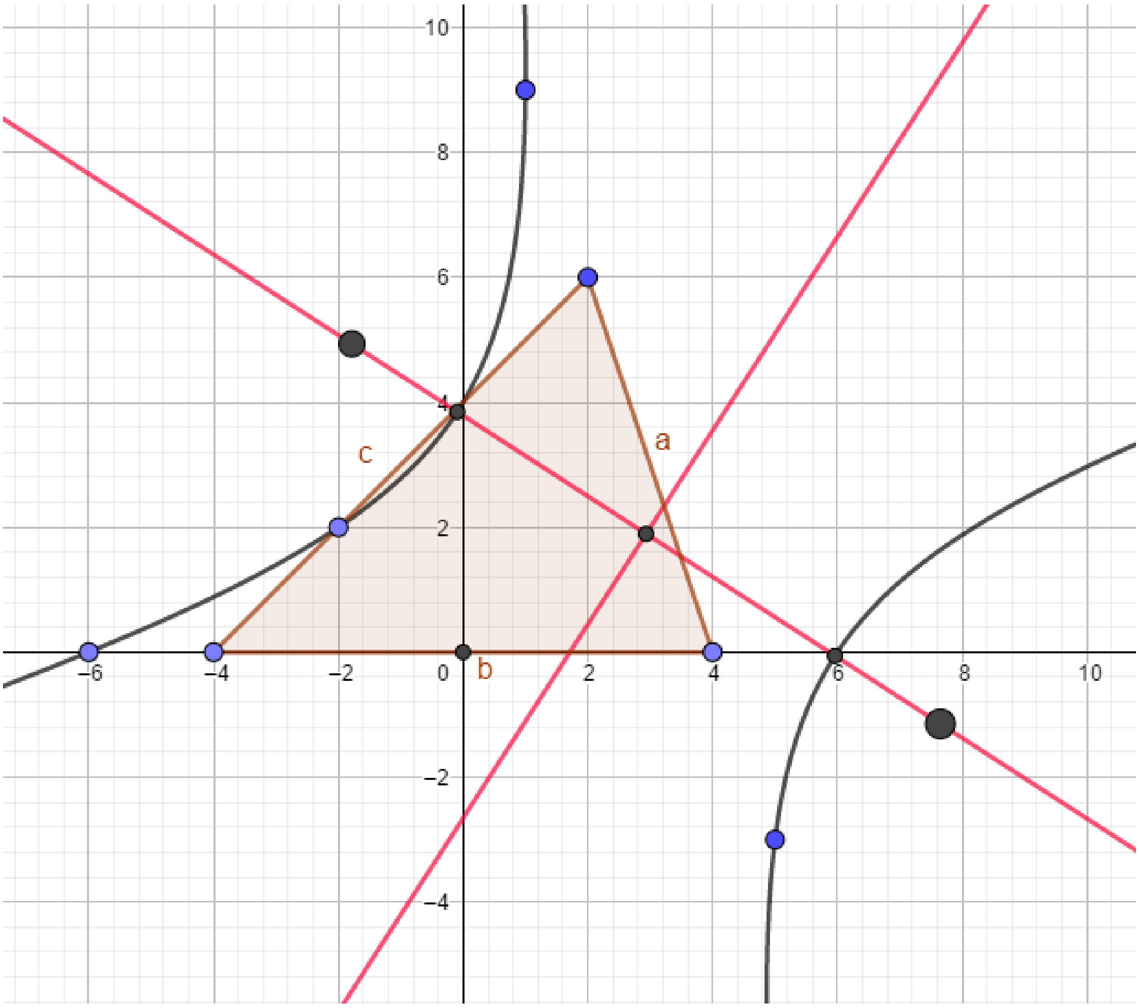
Las perpendicular a tal punto de la tangencia tomada es

Y= -1.49x+10.25 corta al eje en el foco

F_1 (7.65,-1.15) y el simétrico respecto al centro es F_2 (-1.78, 4.94)



p
c
a
b



c)¿En què casos la cónica que los contiene es una circunferencia?

Considerando un triángulo cualquiera ABC , si los puntos tomados son tales que equidistan del circuncentro O, evidentemente serán simétricos respecto a los puntos medios de ABC, luego tales serán los pedidos.

Ricardo Barroso Campos. Jubilado . Sevilla. España