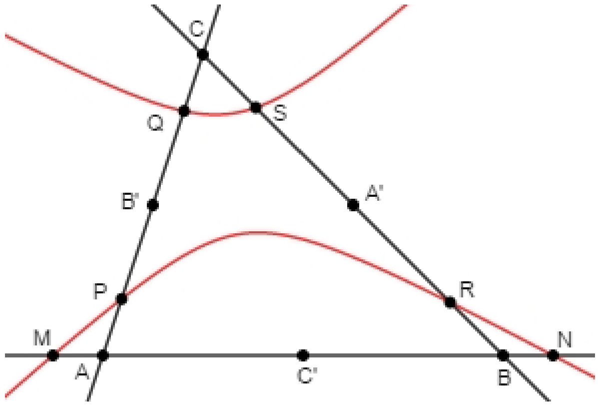
TRIÁNGULOS CABRI

Problema 974. (propuesto por Ricardo Barroso Campos, dedicado in memorian a Miguel Castillo Jiménez) Dado un triángulo ABC con triángulo medial $A'B'C'$, se consideran los puntos M y N en la recta AB simétricos uno del otro respecto de C', los puntos P y Q en la recta CA simétricos uno del otro respecto de B' y los puntos R y S en la recta BC simétricos uno del otro respecto de A', tal como se muestra en la siguiente figura:



① Si $A=(-4,0),\ B=(4,0),\ C=(2,6),\ M=(-6,0),\ N=(6,0),\ P=(-5,-1),\ Q=(3,7),\ R=(5,-3)$ y $S=(1,9)$, hallar la cónica que contiene a los puntos M, N, P, Q, R y S.

② Si $A=(-4,0),\ B=(4,0),\ C=(2,6),\ M=(-6,0),\ N=(6,0),\ P=(-2,2),\ Q=(0,4),\ R=(5,-3)$ y $S=(1,9)$, hallar la cónica que contiene a los puntos M, N, P, Q, R y S.

③ ¿ En qué casos la cónica que contiene a los puntos M, N, P, Q, R y S es una circunferencia ?.

Solución:

① Como la ecuación de una cónica general es:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{01}x+2a_{02}y+a_{00}=0$$

imponiendo que pase por los puntos M, N, P, Q y R, obtenemos la ecuación:

$$63x^2+59y^2+58xy-344y-2268=0$$

pudiéndose comprobar, por simple sustitución, que esta cónica pasa por el punto S, ya que sus coordenadas verifican dicha ecuación. Además, como:

$$\begin{vmatrix} -2268 & 0 & -172 \\ 0 & 63 & 29 \\ -172 & 29 & 59 \end{vmatrix} = -8386560 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 63 & 29 \\ 29 & 59 \end{vmatrix} = 2876 > 0$$

esta cónica es una elipse, cuyo centro es el punto $O=\left(-\frac{1247}{719},\frac{2709}{719}\right)$, por lo que, como las pendientes de sus ejes vienen dadas por las soluciones de la ecuación:

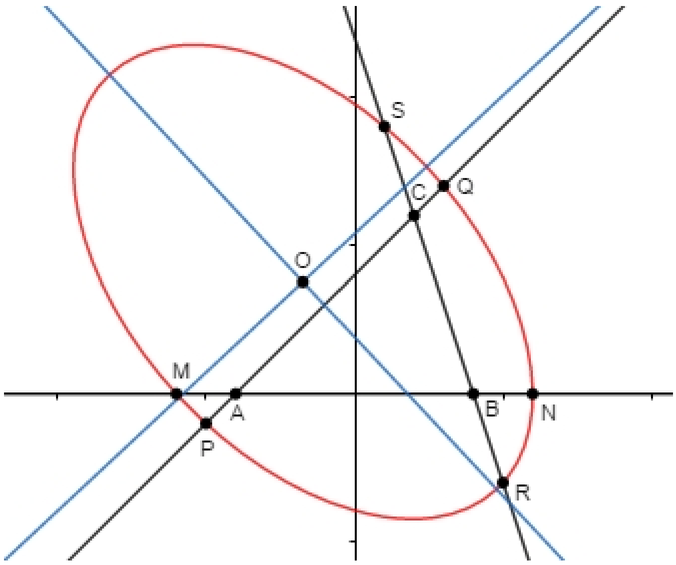
$$0=a_{12}m^2+(a_{11}-a_{22})m-a_{12}=29m^2+4m-29 \Rightarrow \begin{cases} m_1=\dfrac{-2+13\sqrt{5}}{29} \\ m_2=\dfrac{-2-13\sqrt{5}}{29} \end{cases}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

entonces, sus ecuaciones son:

$$\begin{cases} e_1 \equiv y = \dfrac{2709}{719} - \dfrac{2-13\sqrt{5}}{29}\left(x + \dfrac{1247}{719}\right) \\ e_2 \equiv y = \dfrac{2709}{719} - \dfrac{2+13\sqrt{5}}{29}\left(x + \dfrac{1247}{719}\right) \end{cases}$$

Se omite el cálculo de los vértices y focos de esta elipse, ya que las expresiones en coordenadas de éstos es excesivamente complicada.



② Como la ecuación de una cónica general es:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

imponiendo que pase por los puntos M, N, P, Q y $R,$ obtenemos la ecuación:

$$72x^2 - 29y^2 - 223xy + 764y - 2592 = 0$$

pudiéndose comprobar, por simple sustitución, que esta cónica pasa por el punto $S,$ ya que sus coordenadas verifican dicha ecuación. Además, como:

$$\begin{vmatrix} -2592 & 0 & 382 \\ 0 & 72 & -\dfrac{223}{2} \\ 382 & -\dfrac{223}{2} & -29 \end{vmatrix} = 27129960 \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 72 & -\dfrac{223}{2} \\ -\dfrac{223}{2} & -29 \end{vmatrix} = -\frac{58081}{4} < 0$$

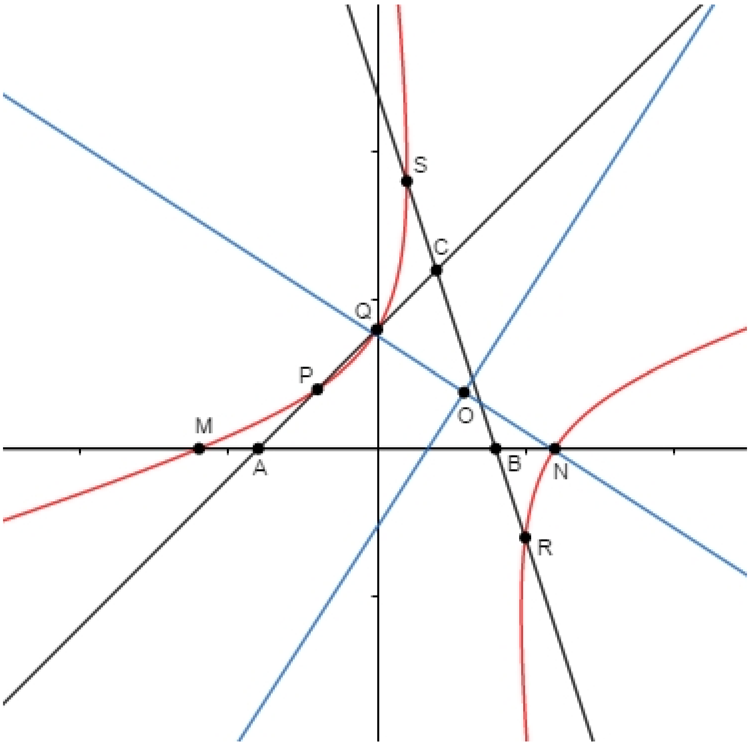
esta cónica es una hipérbola, cuyo centro es el punto $O = \left(\dfrac{170372}{58081}, \dfrac{110016}{58081}\right),$ por lo que, como las pendientes de sus ejes vienen dadas por las soluciones de la ecuación:

$$0 = a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = \frac{-223m^2 + 202m + 223}{2} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{101 + \sqrt{59930}}{223} \\ m_2 = \dfrac{101 - \sqrt{59930}}{223} \end{cases}$$

entonces, sus ecuaciones son:

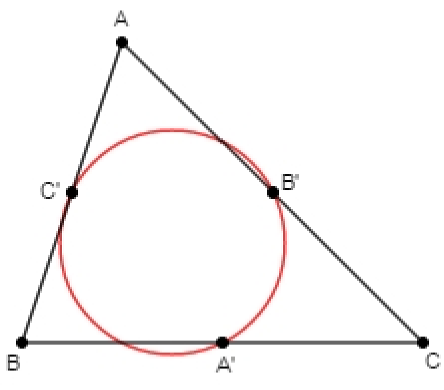
$$\begin{cases} e_1 \equiv y = \dfrac{110016}{58081} + \dfrac{101 + \sqrt{59930}}{223}\left(x - \dfrac{170372}{58081}\right) \\ e_2 \equiv y = \dfrac{110016}{58081} + \dfrac{101 - \sqrt{59930}}{223}\left(x - \dfrac{170372}{58081}\right) \end{cases}$$

Se omite el cálculo de los vértices y focos de esta elipse, ya que las expresiones en coordenadas de éstos es excesivamente complicada.

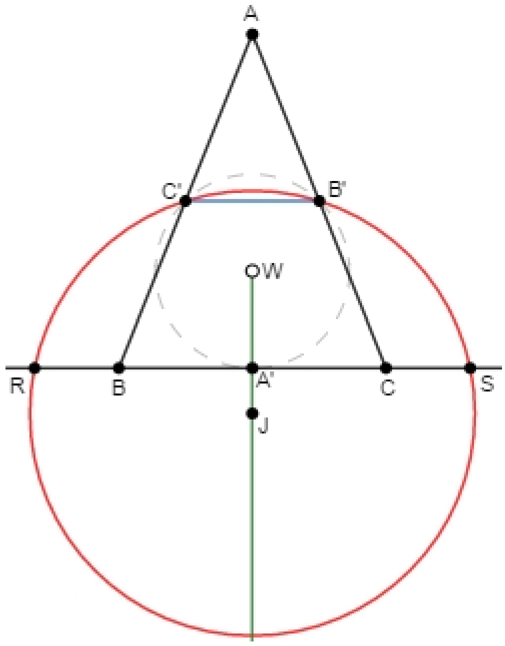


③ Vamos a distinguir varios casos:

❶ Si $M = C' = N$, $P = B' = Q$ y $R = A' = S$, entonces, existen infinitas cónicas que pasan por los (tres) puntos M, N, P, Q, R y S, una de las cuales es la circunferencia de Euler del triángulo ABC.



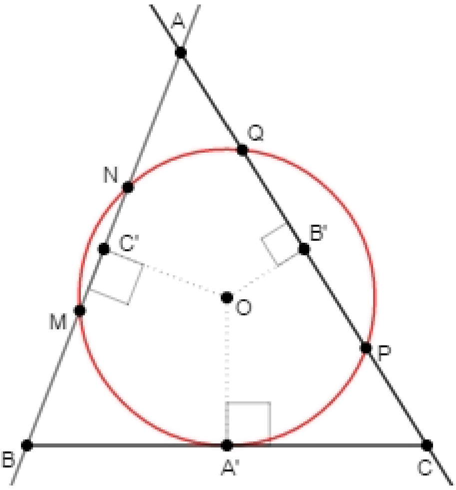
❷ Si $M = C' = N$, $P = B' = Q$ y $R \neq S$ (para las otras dos combinaciones similares de puntos se razonaría de forma totalmente análoga), entonces, existen infinitas cónicas que pasan por los (cuatro) puntos M, N, P, Q, R y S. Además, si existe una circunferencia pasando por estos cuatro puntos, su centro ha de estar situado sobre la mediatriz del segmento $B'C'$ y sobre la mediatriz del segmento RS y, como $B'C' \parallel BC = RS$, entoces, ambas mediatrices son paralelas por lo que si tienen algún punto en común han de ser coincidentes, lo cual significa que el triángulo ABC ha de ser isósceles, siendo $b = c$. En este caso, si W es el centro de la circunferencia de Euler del triángulo ABC, para cualquier punto J situado sobre la semirrecta abierta WA', la circunferencia con centro J y radio $JB' = JC'$ corta a la recta BC en dos puntos R y S distintos y equidistantes ambos del punto A'.



❸ Si $M \neq N$, $P \neq Q$ y $R = A' = S$ (para las otras dos combinaciones similares de puntos se razonaría de forma totalmente análoga), entonces, existe una única cónica que pasa por los (cinco) puntos M, N, P, Q, R y S. Además, si esta cónica es una circunferencia, su centro ha de estar situado sobre la mediatriz del segmento MN (que coincide con la mediatriz del segmento AB) y sobre la mediatriz del segmento PQ (que coincide con la mediatriz del segmento AC), por lo que dicho centro ha de ser el circuncentro O del triángulo ABC y, como la recta OA' es la mediatriz del segmento BC, resulta que $OA' \perp BC$, lo cual significa que esta circunferencia ha de ser tangente en el punto A' a la recta BC, siendo su radio OA' y, por tanto, para tal circunferencia pueda existir, debe ocurrir que:

$$OA' > \max\{d(O,AB), d(O,AC)\} \underset{OC'\perp AB}{\overset{OB'\perp AC}{=}} \max\{OB', OC'\}$$

En este caso, la circunferencia con centro O y radio OA' corta a la recta AB en dos puntos M y N distintos y equidistantes ambos del punto C' y corta a la recta AC en dos puntos P y Q distintos y equidistantes ambos del punto B'.

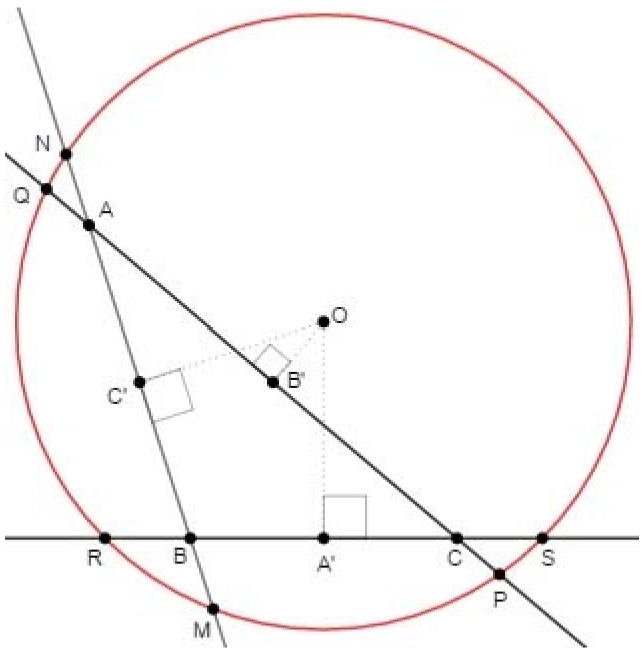


❹ Si $M \neq N$, $P \neq Q$ y $R \neq S$, entonces, existe una única cónica que pasa por los seis puntos M, N, P, Q, R y S (puede probarse utilizando coordendas baricéntricas, pero no lo haremos por ser las operaciones excesivamente complicadas). Además, si esta cónica es una circunferencia, su centro ha de estar situado sobre la mediatriz del segmento MN (que coincide con la mediatriz del segmento AB), sobre la mediatriz del segmento PQ (que coincide con la mediatriz del segmento AC) y sobre la mediatriz del segmento RS (que coincide con la mediatriz del segmento BC), por lo que dicho centro ha de ser el circuncentro O del triángulo ABC y, como $OA' \perp BC$, $OB' \perp AC$ y $OC' \perp AB$, entonces, designando los vértices del triángulo ABC de forma que:

$$OA' \geq \max\{OB', OC'\}$$

resulta que, para cada punto $R \neq A'$ situado sobre el segmento BC:

$$OR > OA' \geq \max\{OB', OC'\}$$



por lo que la circunferencia con centro O y radio OR corta a la recta AB en dos puntos M y N distintos y equidistantes ambos del punto C', corta a la recta AC en dos puntos P y Q distintos y equidistantes ambos del punto B' y corta a la recta BC en un segundo punto S distinto de R y tal que R y S equidistan del punto C'.