Debido al coronavirus, esta edición de *triánguloscabri* será del 16 de Enero al 28 de febrero de 2021.

***Problema* 974.-** *Dado un triángulo ABC, y su medial C', B', A', en la recta AB se tienen los puntos M y N simétricos respecto a C'.*

En la recta AC se tienen los puntos P y Q simétricos respecto a B'. En la recta BC se tienen los puntos R y S simétricos respecto a A'.

Concretando casos.

a) Si los puntos son $A(-4,0), B(4,0), C(2,6), M(-6,0), N(6,0), P(-5,-1), Q(3,7), R(5,-3), S(1,9)$, hallar la cónica que los contiene.

b) Si los puntos son $A(-4,0), B(4,0), C(2,6), M(-6,0), N(6,0), P(-2,2), Q(0,4), R(5,-3), S(1,9)$, hallar la cónica que los contiene.

c) ¿En qué casos la cónica que los contiene es una circunferencia?

Barroso, R. (2021): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

ENUNCIADO DEL TEOREMA DE CARNOT (tomado del número extra 300b de José María Pedret de marzo de 2006)

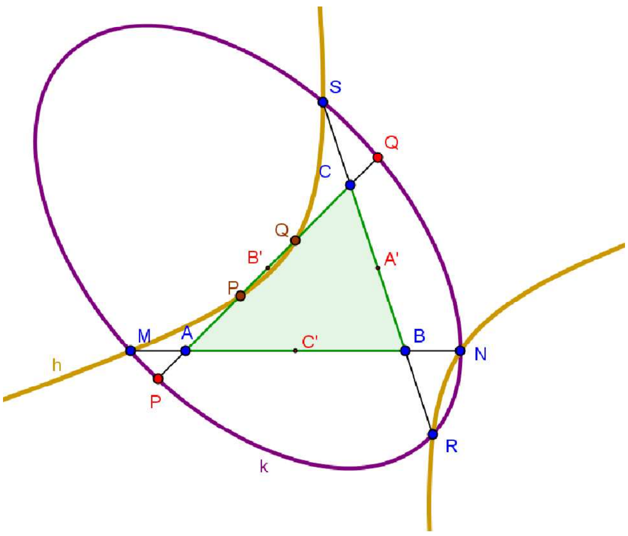
Sea en el plano un triángulo cualquiera ABC. Sean los puntos

$$\{A_1, A_2\} \in BC, \quad \{B_1, B_2\} \in CA, \quad \{C_1, C_2\} \in AB$$

Entonces los seis puntos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 y C_2 están sobre una cónica Γ si y sólo si

$$\left(\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{AC_2}{BC_2}\right) \cdot \left(\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{BA_2}{CA_2}\right) \cdot \left(\frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{CB_2}{AB_2}\right) = 1$$

Tenemos sobre el lado BC, los puntos R y S, simétricos respecto del punto medio A' de este lado. Se tiene, por construcción, $BR = CD$; $BS = CR$, y por tanto, $\frac{BR}{CR} \cdot \frac{BS}{CS} = \frac{BR}{CS} \cdot \frac{BS}{CR} = 1$.



Análogamente en los demás lados. Por todo esto, la aplicación del teorema de Carnot demuestra que estos seis puntos están situados sobre la misma cónica.

Aproximación intuitiva al problema

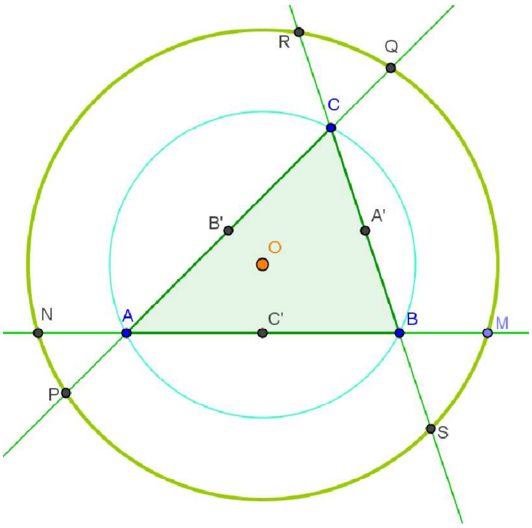
Se observa que la cónica es casi siempre una elipse (porque también hay parábolas) cuando los tres puntos a partir de los que se genera la cónica son exteriores a los lados o, por el contrario, interiores a ellos. En los demás casos se obtiene una hipérbola. Sin embargo, la realidad es más compleja.

En el caso de las circunferencias, se demuestra fácilmente que toda circunferencia concéntrica con la circunscrita corta a las prolongaciones de los lados en 6 puntos que están en las condiciones de nuestro problema. La mediatriz de RS pasa por O y por tanto es igual a la mediatriz de AB, de ahí lo dicho antes.

Las potencias de A, B y C respecto de una de estas circunferencias, son iguales entre sí. Y es una demostración bien sencilla, pues se dan las siguientes igualdades entre las longitudes de los segmentos $AP = CQ$; $CR = BS$ y $AN = BM$.

Solución con coordenadas

Para dejar más claro todo lo anterior, sin ninguna ambigüedad debemos ponernos a calcular. Tomando coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC, tenemos para los seis puntos que definen la cónica las siguientes expresiones:



$M(w, 1-w, 0); N(1-w, w, 0); P(v, 0, 1-v);$

$Q(1-v, 0, v); R(0, u, 1-u); S(0, 1-u, u).$

Con esos datos se obtiene una cónica cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} 2 & 2-g(w) & 2-g(v) \\ 2-g(w) & 2 & 2-g(u) \\ 2-g(v) & 2-g(u) & 2 \end{pmatrix}$$

donde g es la función real definida como

$$g(x) = \frac{1}{x(1-x)}.$$

Obsérvese que el signo de la función g expresa el signo del producto de las coordenadas no nulas de los seis puntos.

La imagen de g son todos los números reales excepto los del intervalo $[0,4)$.

Ecuación de la cónica y centro. Resolución del problema

Poniendo para simplificar $p = g(w)$; $q = g(v)$; $r = g(u)$, resulta la ecuación general de la cónica

$$x^2 + y^2 + z^2 + (2-p)xy + (2-q)xz + (2-r)yz = 0.$$

El centro Z de la cónica se obtiene de la resolución del sistema:

$$(x, \quad y, \quad z,)\begin{pmatrix} 2 & 2-p & 2-q \\ 2-p & 2 & 2-r \\ 2-q & 2-r & 2 \end{pmatrix} = (1, \quad 1, \quad 1)$$

$$Z = [r(p+q-r):\ q(p-q+r):\ p(-p+q+r)].$$

Para hallar los puntos del infinito de esta cónica tomamos $z = -x-y$ y desarrollamos la expresión

$$(x, \quad y, \quad -x-y)\begin{pmatrix} 2 & 2-p & 2-q \\ 2-p & 2 & 2-r \\ 2-q & 2-r & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} = 0$$

De lo cual resulta la ecuación $ry^2 + (-p+q+r)xy + qx^2 = 0$

Habrá puntos en el infinito según que el valor del discriminante de esa ecuación sea **positivo** (caso **hipérbola**), *negativo* (*elipse*) o **nulo** (**parábola**)

$$\boxed{\Delta = (-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r})^2 - 4\boldsymbol{rq}}$$

Este discriminante es invariable por permutaciones de las tres variables y es par. Es fácil ver que

$$\Delta = (-p+q+r)^2 - 4qr = (p-q+r)^2 - 4rp = (p+q-r)^2 - 4pq$$
$$= p^2 + q^2 + r^2 - 2pqr\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)$$

De ella deducimos que es una función par de sus variables y además invariante por permutaciones de cualquier par de ellas.

Si los elementos de un par $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$; $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ o $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p})$ son de distinto signo, el discriminante será positivo y tendremos una **hipérbola**. Esto sucede cuando los tres valores no tienen un signo común, dos son positivos y uno negativo o viceversa, aunque también hay hipérbolas con todos los parámetros positivos o negativos.

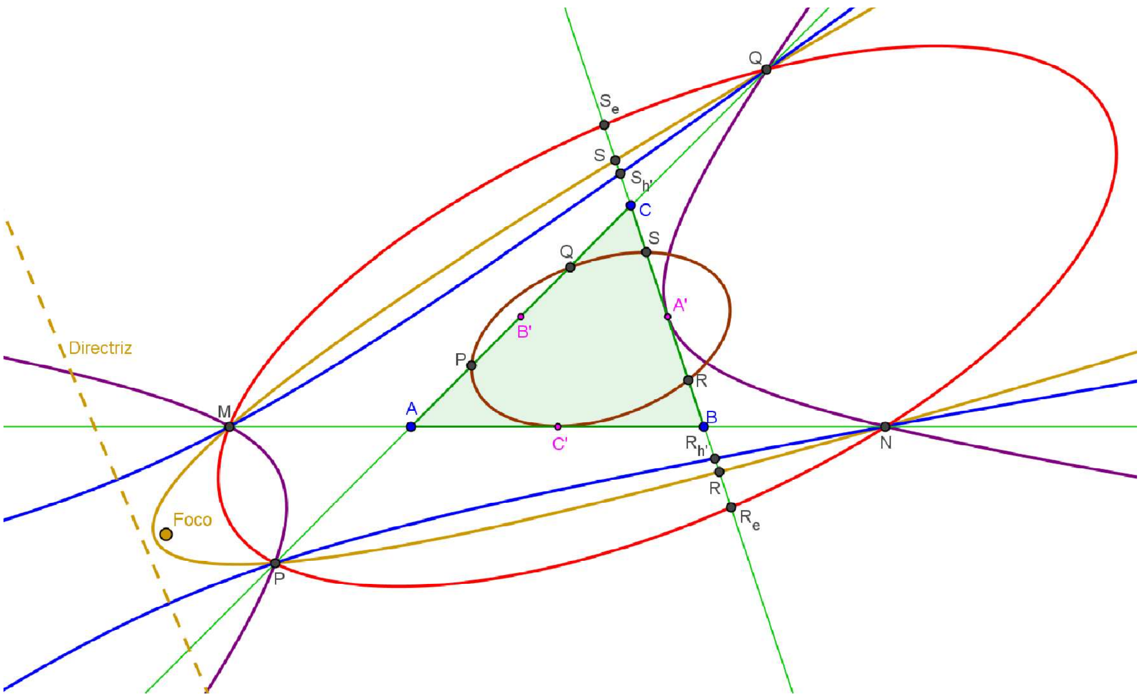
Si $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ tienen el mismo signo y fijamos dos parámetros (q,r) por ejemplo, podemos escoger p para obtener el tipo de cónica que queramos, pues poniendo $\Delta = 0$ y resolviendo en p, tendremos que

$$\Delta < \mathbf{0} \text{ si } \boldsymbol{p} \in \left(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{q}-\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{qr}}, \boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}+\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{qr}}\right) \textbf{ y tendremos una elipse,}$$

$$\Delta > \mathbf{0} \text{ si } \boldsymbol{p} \notin \left[\boldsymbol{r}+\boldsymbol{q}-\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{qr}}, \boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}+\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{qr}}\right] \textbf{ y tendremos una hipérbola}$$

$$\Delta = \mathbf{0} \text{ si } \boldsymbol{p} \in \left\{\boldsymbol{r}+\boldsymbol{q}-\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{qr}}, \boldsymbol{r}+\boldsymbol{s}+\mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{qr}}\right\} \textbf{ y será una parábola.}$$

Hay que tener en cuenta además que, según la imagen de la función g, los valores de los parámetros p,q,r han de estar en $\mathbb{R}-[0,4)$.



Obsérvese que la suma de las coordenadas del centro Z es $4qr-(-p+q+r)^2=-\Delta$, que es nulo justamente cuando la cónica es una parábola y su centro está en el infinito.

r	*q*	*p*	*Cónica*
-1	*-1*	*-2*	*Elipse (externa)*
4	*5*	*6*	*Elipse (interna)*
-1	*-1*	*-4*	*Parábola*
-1	*-1*	*4*	*Hipérbola (h)*
-1	*-1*	*-6*	*Hipérbola (h')*

Las cónicas de la última figura se han obtenido a partir de los valores de la tabla adjunta.

En el caso de la **circunferencia** sabemos que en coordenadas baricéntricas su ecuación general es de la forma

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy-(x+y+z)(\alpha x+\beta y+\gamma z)=0$$

donde α,β,γ son las potencias de A,B y C respectivamente, con relación a ella.

Sabemos ya que para que haya circunferencia esas tres potencias han de ser iguales, por lo que la ecuación de la circunferencia será

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy=\alpha(x+y+z)^2$$

Desarrollando esta expresión podemos poner $x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{a^2}{\alpha} - 2\right) yz + \left(\frac{b^2}{\alpha} - 2\right) zx + \left(\frac{c^2}{\alpha} - 2\right) xy.$

Comparando con la ecuación general

$$x^2 + y^2 + z^2 + (2 - p)xy + (2 - q)xz + (2 - r)yz = 0$$

deducimos que $p = g(w) = \frac{a^2}{\alpha};\ q = g(v) = \frac{b^2}{\alpha}; r = g(u) = \frac{c^2}{\alpha}$ y de aquí se obtiene la expresión que liga las coordenadas de P y R con las de M y que sirven para construir la cónica en este caso.

$\alpha = a^2 w(1 - w) = b^2 v(1 - v) = c^2 u(1 - u)$ o bien $\alpha = \frac{a^2}{p} = \frac{b^2}{q} = \frac{c^2}{r}$. ■