Problema 975. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un segmento BC, se consideran dos puntos D y E interiores a él y tales que:

$$BD : DE : EC = u : v : w \; (u, v, w > 0)$$

Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que la circunferencia circunscrita al triángulo ADE corte a los segmentos AC y AB en puntos P y Q, respectivamente, tales que $BP = CQ$.

Solución:

Si A es uno de estos puntos, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como:

$$\begin{cases} D = (0 : v + w : u) \\ E = (0 : w : u + v) \end{cases}$$

entonces, la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo ADE es:

$$-a^2u(u+v)y^2 - a^2w(v+w)z^2 + \left[c^2(u+v+w)^2 - a^2u(u+v)\right]xy + \left[b^2(u+v+w)^2 - a^2w(v+w)\right]xz + [v(u+v+w) + 2uw]yz = 0$$

por lo que, resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones, resulta que:

$$\begin{cases} P = (a^2u(u+v) : c^2(u+v+w)^2 - a^2u(u+v) : 0) \\ Q = (a^2w(v+w) : 0 : b^2(u+v+w)^2 - a^2w(v+w)) \end{cases}$$

luego:

$$\begin{cases} BP = \dfrac{a^2u(u+v)}{c(u+v+w)^2} \\ CQ = \dfrac{a^2w(v+w)}{b(u+v+w)^2} \end{cases}$$

y, por tanto:

$$0 = BP - CQ = \frac{a^2u(u+v)}{c(u+v+w)^2} - \frac{a^2w(v+w)}{b(u+v+w)^2} = \frac{a^2[bu(u+v) - cw(v+w)]}{bc(u+v+w)^2}$$

es decir:

$$bu(u+v) = cw(v+w)$$

Vamos a distinguir dos casos:

① Si $u \neq w$, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio M del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento BC, si $A = (x, y) \; (y \neq 0)$, como:

$$\begin{cases} C = (1, 0) \\ B = (-1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = BC = 2 \\ b = AC = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ c = AB = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{cases}$$

y:

$$b^2u^2(u+v)^2 - c^2w^2(v+w)^2 = 0$$

entonces:

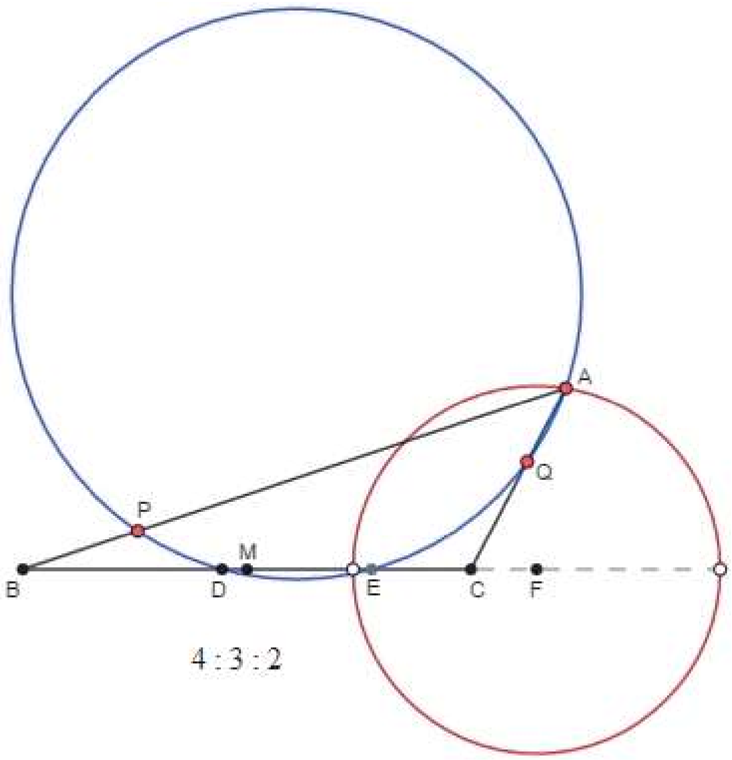
$$\left[u^2(u+v)^2 - w^2(v+w)^2\right](x^2+y^2) - 2\left[u^2(u+v)^2 + w^2(v+w)^2\right]x + u^2(u+v)^2 - w^2(v+w)^2 = 0$$

$$x^2 - 2\left[\frac{u^2(u+v)^2 + w^2(v+w)^2}{u^2(u+v)^2 - w^2(v+w)^2}\right]x + y^2 + 1 = 0$$

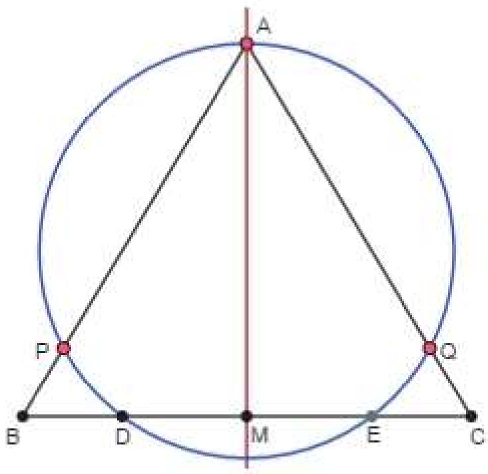
$$\left[x - \frac{u^2(u+v)^2 + w^2(v+w)^2}{u^2(u+v)^2 - w^2(v+w)^2}\right]^2 + y^2 + 1 - \left[\frac{u^2(u+v)^2 + w^2(v+w)^2}{u^2(u+v)^2 - w^2(v+w)^2}\right]^2 = 0$$

por lo que el lugar geométrico pedido es la circunferencia con centro en el punto F de la semirrecta MC situado a una distancia $\frac{1}{2}\left(\frac{u^2(u+v)^2 + w^2(v+w)^2}{u^2(u+v)^2 - w^2(v+w)^2}\right)BC$ de M y cuyo radio es igual a $\left(\frac{uw(u+v)(v+w)}{(u+v+w)|u-w|(u^2+uv+vw+w^2)}\right)BC,$ exceptuando sus puntos de intersección con la recta $BC,$ ya que para estos puntos no tendríamos un triángulo.

② Si $u = w,$ entonces, $b = c,$ por lo que el lugar geométrico pedido es la recta mediatriz del segmento $BC,$ exceptuando su punto de intersección con la recta $BC,$ ya que para este punto no tendríamos un triángulo.



4 : 3 : 2



2 : 5 : 2