Pr. Cabri 976

Enunciado

Sea ABC un triángulo, P un punto en su plano y n1 un número positivo. El triángulo A1B1C1 homotético de ABC con centro de homotecia P y razón n1 comparte las mismas cevianas de P. Probar que los 6 puntos de intersección de las prolongaciones de los lados de A1B1C1 y las prolongaciones de ABC que no son A, B, C, A1 ,B1 , C1 pertenecen a una misma cónica y que al variar n 1 los centros de tales cónicas describen un segmento rectilíneo.

(Pequeño cambio en el enunciado). Probar además que dicha cónica es elipse si P es interior a ABC e hipérbola si es exterior. ¿Qué tipo de cónica tendremos si está en la frontera?

(Aportación de Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, a quien agradezco la indicación) Probar, además, que dicha cónica es de tipo parabólico si elpunto P está situado sobre la inelipse de Steiner del triángulo ABC, es de tipo elíptico si el punto P esinterior a dicha inelipse y es de tipo hiperbólico si es exterior a dicha inelipse

Propuesto por Antonio Casas Pérez.

Solución

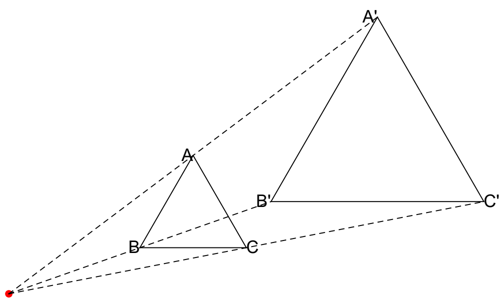
de César Beade Franco

Los dos añadidos son incompatibles. Según veremos es la in-elipse de Steiner la frontera que discrmina el tipo de cónica.

Como es un problema de geometría afín ceñiremos la demostración al triángulo equilátero de vértices A(0,2), B($\frac{-2}{\sqrt{3}}$, 0) y C($\frac{2}{\sqrt{3}}$, 0). El centro de homotecia es P(p,q) y la razón de homotecia k.

En estas condiciones el triángulo homotético será A'(p-k p,k (2-q)+q), B'($k\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}-p\right)+p,\ q-k q$) y C'($k\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-p\right)+p,\ q-k q$).

Out[323]=



Los puntos de intersección son

D=AB∩C'A'=($-\frac{1}{6}(-1+k)\left(3p+\sqrt{3}(-2+q)\right),\ \frac{1}{2}\left(2+2k-\sqrt{3}(-1+k)p+q-kq\right)$),

E=AB∩C'B'=($\frac{-2+q-kq}{\sqrt{3}},\ q-kq$), F=BC∩A'B'=($p+\frac{1}{3}k\left(-3p+\sqrt{3}(-2+q)\right)-\frac{q}{\sqrt{3}},\ 0$),

G=BC∩A'C'=($p-\frac{1}{3}k\left(3p+\sqrt{3}(-2+q)\right)+\frac{q}{\sqrt{3}},\ 0$),

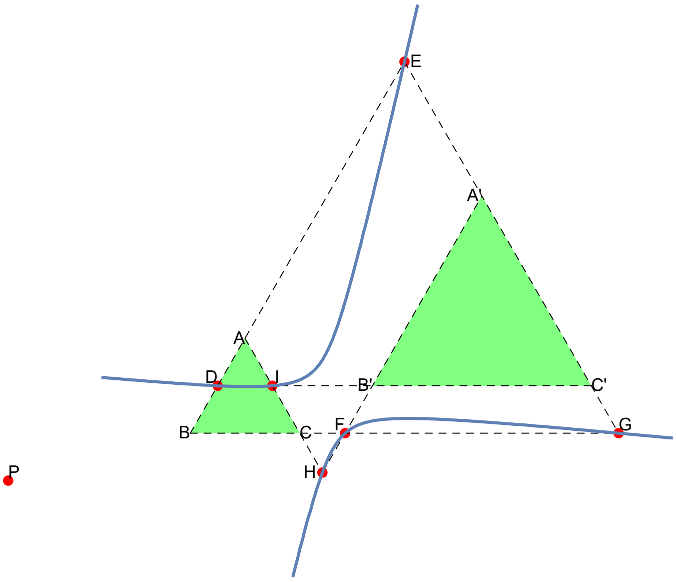
H=CA∩B'A'=$\left(\frac{1}{6}(-1+k)\left(-3p+\sqrt{3}(-2+q)\right), \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}p+k\left(2+\sqrt{3}p-q\right)+q\right)\right)$,
I=H=CA∩B'C'.

La cónica DEFGH tiene por ecuación

$$q\left(k^2\left(-3p^2+(-2+q)^2\right)+q^2+k\left(-2(-2+q)q+6p(p-x)\right)-3(p-x)^2\right)+\left(4-3q^2+k\left(4-3p^2-8q+3q^2\right)+3p(p-2x)\right)y+(-4+3q)y^2=0.$$

Las coordenadas de I la verifican asi que I pertenece tmbién a la cónica.

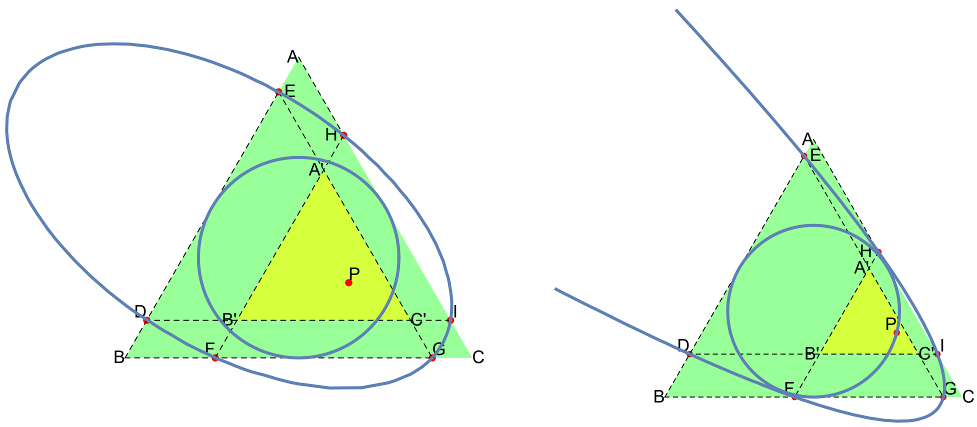
Out[575]=



Para analizar el tipo de cónica calculamos su invariante afín. Su valor es IA=$-\frac{1}{4}+p-p^2+q-pq-q^2$=-Pot(P), donde Pot(P) es la potencia del punto P respecto a su circunferencia inscrita. Si P es interior a dicha circunferencia Pot(P)<0 ⇒ IA>0 y la cónica es una elipse. Y si P es exterior tenemos una hipérbola.

En un triángulo equilátero la circunferencia inscrita es la in-elipse de Steiner que no varía por una transformación afín, concluímos que para cualquier triángulo las cónicas así obtenidas serán elipses, parábolas o hipérbolas según P sea un punto interior, frontera o exterior a la in-elipse e Steiner.

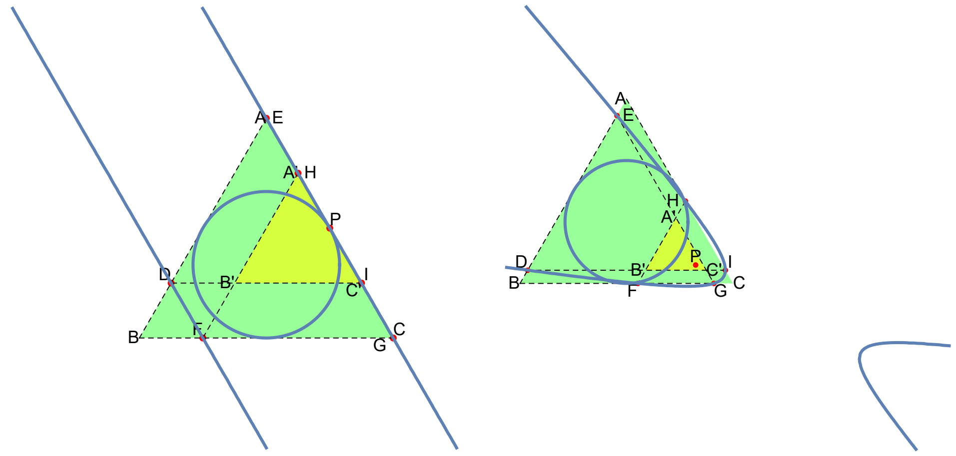
Out[823]=



Si P está sobre un punto de tangencia de la circunferencia inscrita con un lado del triángulo la cónica deviene en un par de rectas paralelas.

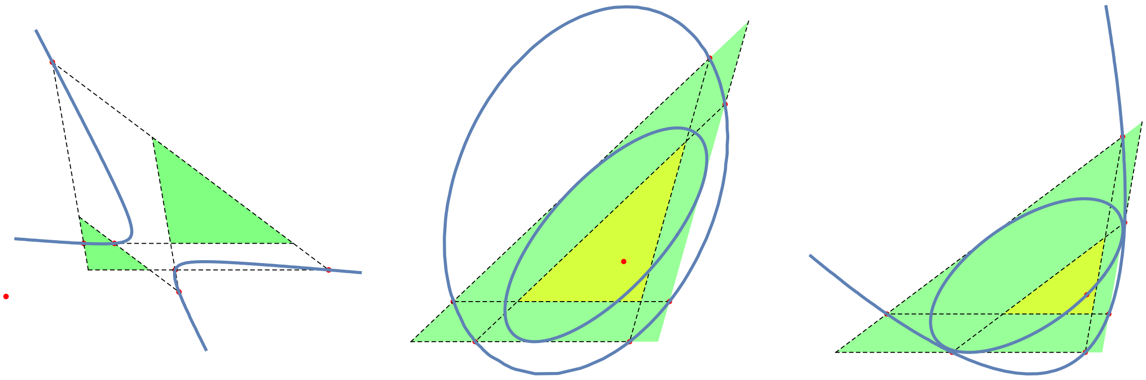
Observamos también la situación cuando P es interior al triángulo pero exterior a la circunferencia inscrita. Aparece una hipérbola contradiciendo el primer cambio del enunciado.

Out[835]=



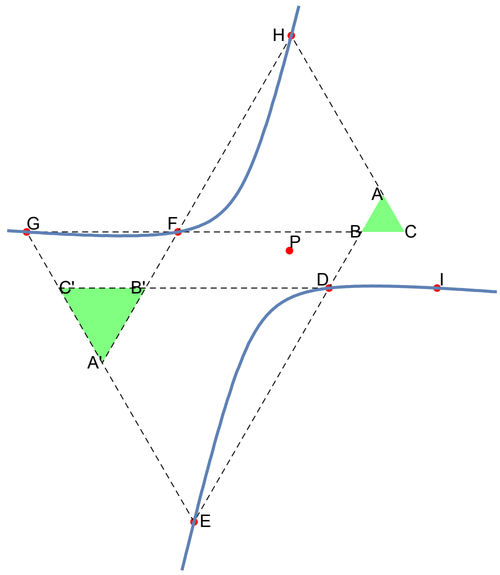
Cambiámos de triángulo.

Out[887]=



La restricción de k a valores positivos no es necesaria como muestra el siguiente dibujo.

Out[933]=

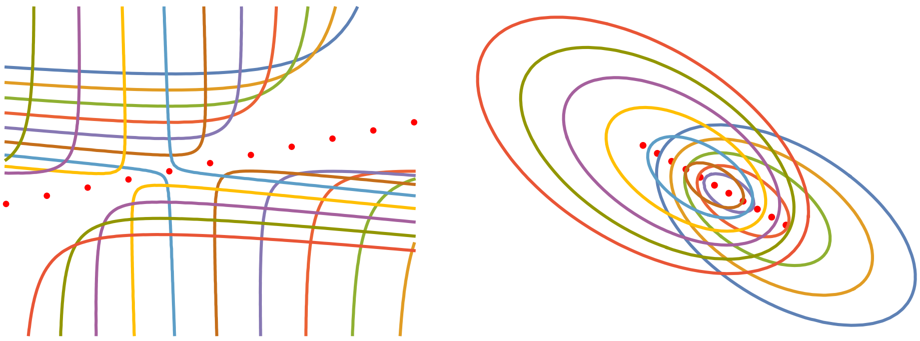


En cuanto a los centros, su expresión en función de k resulta ser para el triángulo anterior $C(k)=\left(\frac{1}{2}\,p\,\left(1-k-\frac{4\,(1+k)\,(-1+q)}{3\,p^2+q\,(-4+3\,q)}\right),\ \frac{q\,\left(-4+3\,p^2+3\,q^2-k\,\left(4+3\,p^2-8\,q+3\,q^2\right)\right)}{6\,p^2+2\,q\,(-4+3\,q)}\right)$. Eliminando el parámetro obtenemos la ecuación en x e y

$p\,(-4+3\,p^2+3\,q^2)\,y == q\,(8\,p\,(-1+q)+3\,p^2\,x+(-2+q)\,(-2+3\,q)\,x)$,

de primer grado, o sea, una recta.

Out[969]=



¿Y qué pasa con las parábolas? Parece que los focos están alineados.

Out[985]=