

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 976. (propuesto por Antonio Casas Pérez) Dados un triángulo ABC , un punto P situado en el plano que contiene al triángulo y $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, el triángulo $A'B'C'$ homotético a ABC con centro de homotecia P y razón n comparte las mismas cevianas de P . Probar que los seis puntos M, N, Q, T, U y V de intersección entre las prolongaciones de los lados del triángulo $A'B'C'$ y las prolongaciones de los lados del triángulo ABC que no son ninguno de los vértices de estos dos triángulos están situados sobre una misma cónica y que, al variar n , los centros de tales cónicas describen un segmento rectilíneo, salvo para algunas posiciones del punto P que habrá que determinar. Probar, además, que dicha cónica es de tipo parabólico si el punto P está situado sobre la inelipse de Steiner del triángulo ABC , es de tipo elíptico si el punto P es interior a dicha inelipse y es de tipo hiperbólico si es exterior a dicha inelipse.

Solución:

- ① Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , si $P = (u : v : w)$ ($u + v + w > 0$), entonces:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \begin{cases} A' = (u + nv + nw : (1-n)v : (1-n)w) \\ B' = ((1-n)u : nu + v + nw : (1-n)w) \\ C' = ((1-n)u : (1-n)v : nu + nv + w) \end{cases}$$

por lo que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \begin{cases} A'B' \equiv 0 = (n-1)wx + (n-1)wy + (u + v + nw)z \\ B'C' \equiv 0 = (nu + v + w)x + (n-1)uy + (n-1)uz \\ C'A' \equiv 0 = (n-1)vx + (u + nv + w)y + (n-1)vz \end{cases}$$

luego:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \begin{cases} M = AB \cap B'C' = ((1-n)u : nu + v + w : 0) \\ N = CA \cap B'C' = ((1-n)u : 0 : nu + v + w) \\ Q = BC \cap C'A' = (0 : (1-n)v : u + nv + w) \\ T = AB \cap C'A' = (u + nv + w : (1-n)v : 0) \\ U = CA \cap A'B' = (u + v + nw : 0 : (1-n)w) \\ V = BC \cap A'B' = (0 : u + v + nw : (1-n)w) \end{cases}$$

siendo, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, la ecuación de la cónica que pasa por los puntos M, N, Q, T y U :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(n-1)vw(nu + v + w) & w[2n^2uv + n((u-v)^2 + w(u+v)) + 2uv + w(u+v+w)] & v[2n^2uw + n((u-w)^2 + v(u+w)) + 2uw + v(u+v+w)] \\ w[2n^2uv + n((u-v)^2 + w(u+v)) + 2uv + w(u+v+w)] & 2(n-1)uw(u + nv + w) & u[2n^2vw + n((v-w)^2 + u(v+w)) + 2vw + u(u+v+w)] \\ v[2n^2uw + n((u-w)^2 + v(u+w)) + 2uw + v(u+v+w)] & u[2n^2vw + n((v-w)^2 + u(v+w)) + 2vw + u(u+v+w)] & 2(n-1)uv(u + v + nw) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

y pudiéndose comprobar, por simple sustitución, que el punto V está situado sobre ella, ya que sus coordenadas verifican dicha ecuación. Además, como, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, el centro (conjugado de la recta del infinito) de esta cónica es el punto:

$$W_n = (u(u^2 - uv + nuv - nv^2 - uw + nuw - 2vw - nw^2) : v(-nu^2 - uv + nuv + v^2 - 2uw - vw + nvw - nw^2) : w(-nu^2 - 2uv - nv^2 - uw + nuw - vw + nvw + w^2))$$

TRIÁNGULOS CABRI

eliminando los parámetros k y n del siguiente sistema de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = ku(u^2 - uv + nuv - nv^2 - uw + nuw - 2vw - nw^2) \\ y = kv(-nu^2 - uv + nuv + v^2 - 2uw - vw + nvw - nw^2) \\ z = kw(-nu^2 - 2uv - nv^2 - uw + nuw - vw + nvw + w^2) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

obtenemos la ecuación:

$$vw(w - v)x + uw(u - w)y + uv(v - u)z = 0$$

que corresponde a una recta salvo cuando:

$$\begin{cases} 0 = vw(w - v) \\ 0 = uw(u - w) \\ 0 = uv(v - u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} u = 0 \\ v = w \end{cases} \rightarrow P = (0 : 1 : 1) = D \\ \text{ó} \\ \begin{cases} u = w \\ v = 0 \end{cases} \rightarrow P = (1 : 0 : 1) = E \\ \text{ó} \\ \begin{cases} u = v \\ w = 0 \end{cases} \rightarrow P = (1 : 1 : 0) = F \\ \text{ó} \\ u = v = w \rightarrow P = (1 : 1 : 1) = G \\ \text{ó} \\ \begin{cases} v = 0 \\ w = 0 \end{cases} \rightarrow P = (1 : 0 : 0) = A \\ \text{ó} \\ \begin{cases} u = 0 \\ w = 0 \end{cases} \rightarrow P = (0 : 1 : 0) = B \\ \text{ó} \\ \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \rightarrow P = (0 : 0 : 1) = C \end{cases}$$

siendo DEF el triángulo medial del triángulo ABC y el punto G su baricentro. Además:

❶ Si $P = G$, entonces:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \begin{cases} M = (1 - n : n + 2 : 0) \\ N = (1 - n : 0 : n + 2) \\ Q = (0 : 1 - n : n + 2) \\ T = (n + 2 : 1 - n : 0) \\ U = (n + 2 : 0 : 1 - n) \\ V = (0 : n + 2 : 1 - n) \end{cases}$$

siendo la ecuación de la cónica que pasa por estos seis puntos:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : (n^2 + n - 2)(x^2 + y^2 + z^2) + (2n^2 + 2n + 5)(xy + xz + yz) = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

y el centro de ésta (para cualquier valor de $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) el punto $G = (1 : 1 : 1)$.

❷ Si $P = A$, entonces:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \begin{cases} M = (1 - n : n : 0) \\ N = (1 - n : 0 : n) \\ Q = (0 : 0 : 1) = C \\ T = (1 : 0 : 0) = A \\ U = (1 : 0 : 0) = A \\ V = (0 : 1 : 0) = B \end{cases}$$

siendo la ecuación de la cónica que pasa por estos cinco puntos:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : yz = 0$$

y el centro de ésta (para cualquier valor de $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) el punto $A = (1 : 0 : 0)$.

❸ Si $P = B$, entonces:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \begin{cases} M = (0 : 1 : 0) = B \\ N = (0 : 0 : 1) = C \\ Q = (0 : 1 - n : n) \\ T = (n : 1 - n : 0) \\ U = (1 : 0 : 0) = A \\ V = (0 : 1 : 0) = B \end{cases}$$

siendo la ecuación de la cónica que pasa por estos cinco puntos:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : xz = 0$$

y el centro de ésta (para cualquier valor de $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) el punto $B = (0 : 1 : 0)$.

❹ Si $P = C$, entonces:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \begin{cases} M = (0 : 1 : 0) = B \\ N = (0 : 0 : 1) = C \\ Q = (0 : 0 : 1) = C \\ T = (1 : 0 : 0) = A \\ U = (n : 0 : 1 - n) \\ V = (0 : n : 1 - n) \end{cases}$$

siendo la ecuación de la cónica que pasa por estos cinco puntos:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : xy = 0$$

y el centro de ésta (para cualquier valor de $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) el punto $C = (0 : 0 : 1)$.

TRIÁNGULOS CABRI

- ❶ Si $P = D = (0 : 1 : 1)$, entonces:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \begin{cases} M = (0 : 1 : 0) = B \\ N = (0 : 0 : 1) = C \\ Q = (0 : 1 - n : 1 + n) \\ T = (1 + n : 1 - n : 0) \\ U = (1 + n : 0 : 1 - n) \\ V = (0 : 1 + n : 1 - n) \end{cases}$$

siendo la ecuación de la cónica que pasa por estos seis puntos:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : x[(n-1)x + (n+1)y + (n+1)z] = 0$$

y el centro de ésta (para cualquier valor de $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) el punto del infinito de la recta BC , $BC_{\infty} = (0 : 1 : -1)$.

- ❷ Si $P = E = (0 : 1 : 0)$, entonces:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \begin{cases} M = (1 - n : 1 + n : 0) \\ N = (1 - n : 0 : 1 + n) \\ Q = (0 : 0 : 1) = C \\ T = (1 : 0 : 0) = A \\ U = (1 + n : 0 : 1 - n) \\ V = (0 : 1 + n : 1 - n) \end{cases}$$

siendo la ecuación de la cónica que pasa por estos seis puntos:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : y[(n+1)x + (n-1)y + (n+1)z] = 0$$

y el centro de ésta (para cualquier valor de $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) el punto del infinito de la recta CA , $CA_{\infty} = (1 : 0 : -1)$.

- ❸ Si $P = F = (1 : 1 : 0)$, entonces:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \begin{cases} M = (1 - n : 1 + n : 0) \\ N = (1 - n : 0 : 1 + n) \\ Q = (0 : 1 - n : 1 + n) \\ T = (1 + n : 1 - n : 0) \\ U = (1 : 0 : 0) = A \\ V = (0 : 1 : 0) = B \end{cases}$$

siendo la ecuación de la cónica que pasa por estos seis puntos:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : z[(n+1)x + (n+1)y + (n-1)z] = 0$$

y el centro de ésta (para cualquier valor de $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) el punto del infinito de la recta AB , $AB_{\infty} = (1 : -1 : 0)$.

TRIÁNGULOS CABRI

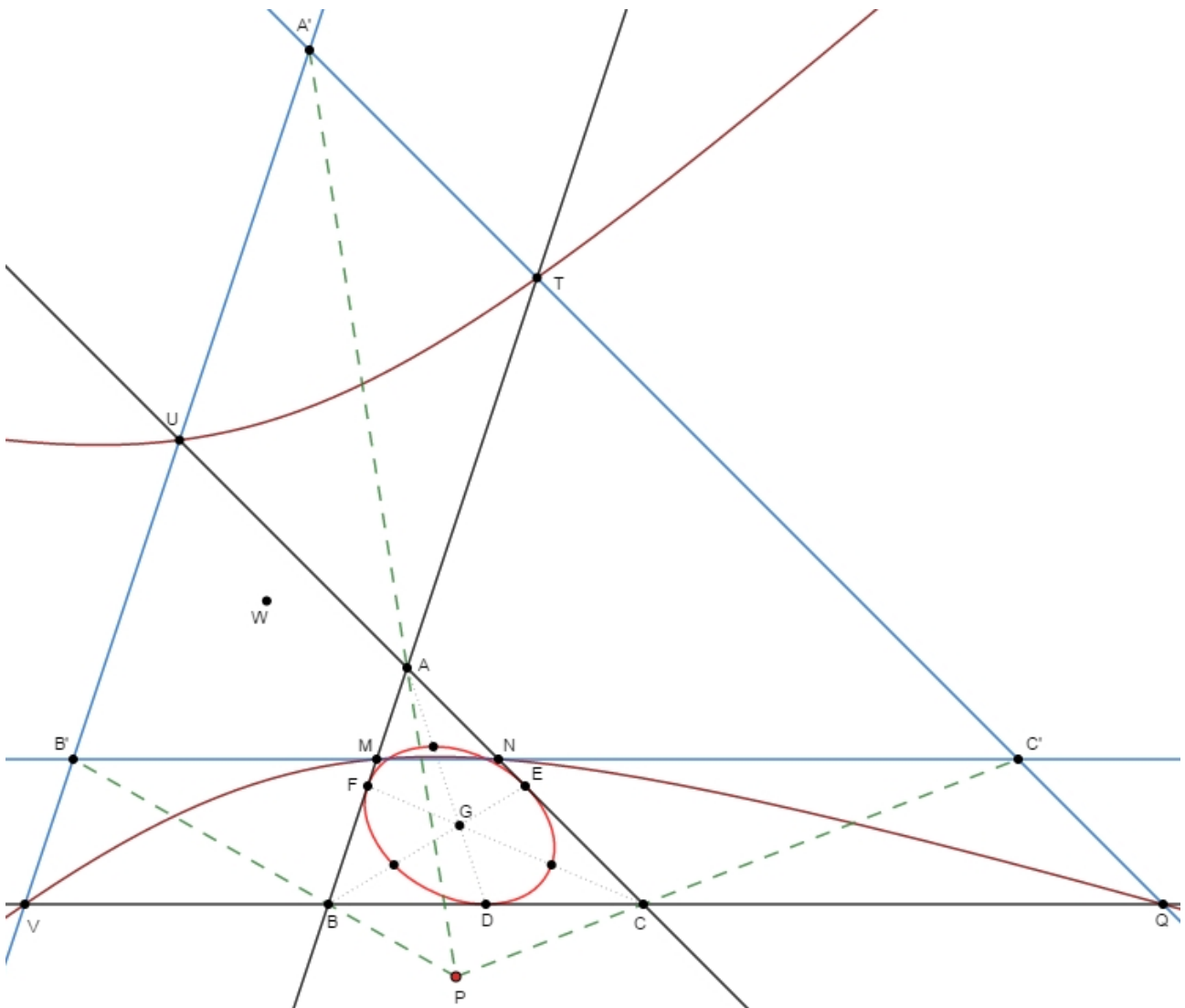
② Como el discriminante de esta cónica es:

$$\Delta = \frac{(u+v+w)^4(u^2+v^2+w^2-2uv-2uw-2vw)}{4}$$

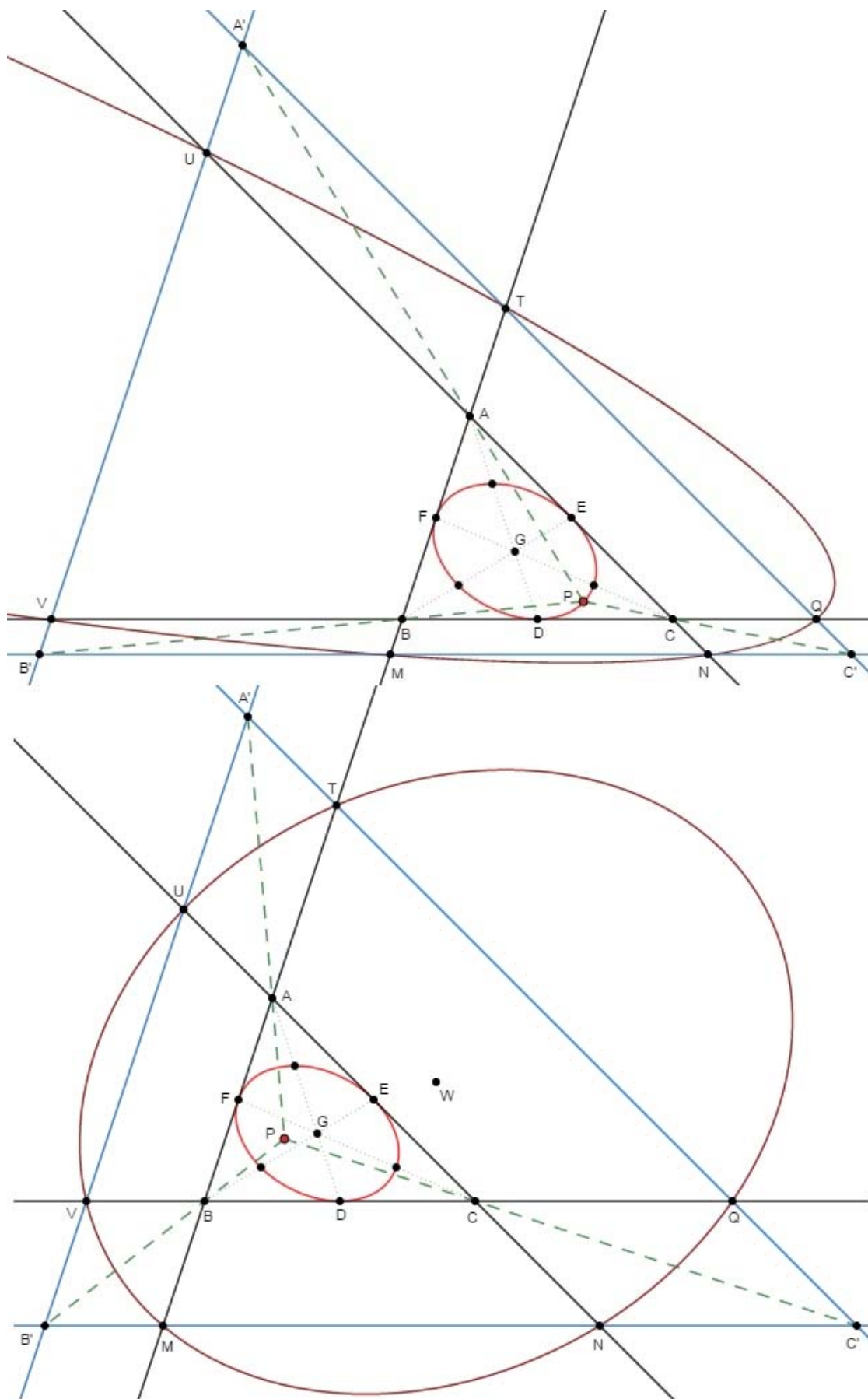
y la cónica de ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0$$

es la inelipse de Steiner del triángulo ABC (es tangente interiormente a los lados del triángulo en los puntos D , E y F y está centrada en su baricentro G), entonces, esta cónica es de tipo parabólico si el punto P está situado sobre la inelipse de Steiner del triángulo ABC , es de tipo elíptico si el punto P es interior a dicha inelipse y es de tipo hiperbólico si es exterior a dicha inelipse.



TRIÁNGULOS CABRI



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

Además, como el determinante de su matriz asociada es:

$$\theta = 2uvw(u+v+w)^4[nu^2 + nv^2 + nw^2 + (n^2+1)uv + (n^2+1)uw + (n^2+1)vw]$$

entonces, esta cónica será degenerada en los siguientes casos:

- ❶ Cuando $u = 0$, es decir, cuando el punto P esté situado sobre la recta BC , en cuyo caso, será un par de rectas paralelas cuando $P = D$:

$$x[(n-1)x + (n+1)y + (n+1)z] = 0$$

y un par de rectas secantes para cualquier otro punto de esta recta:

$$x[(n-1)vwx + w(nv+w)y + v(v+nw)z] = 0$$

siendo una de las rectas de dichos pares la recta BC y la otra la recta TU .

- ❷ Cuando $v = 0$, es decir, cuando el punto P esté situado sobre la recta CA , en cuyo caso, será un par de rectas paralelas cuando $P = E$:

$$y[(n+1)x + (n-1)y + (n+1)z] = 0$$

y un par de rectas secantes para cualquier otro punto de esta recta:

$$y[w(nu+w)x + (n-1)uwy + u(u+nw)z] = 0$$

siendo una de las rectas de dichos pares la recta CA y la otra la recta MV .

- ❸ Cuando $w = 0$, es decir, cuando el punto P esté situado sobre la recta AB , en cuyo caso, será un par de rectas paralelas cuando $P = F$:

$$z[(n+1)x + (n+1)y + (n-1)z] = 0$$

y un par de rectas secantes para cualquier otro punto de esta recta:

$$z[v(nu+v)x + u(u+nv)y + (n-1)uvz] = 0$$

siendo una de las rectas de dichos pares la recta AB y la otra la recta NQ .

- ❹ Cuando $nu^2 + nv^2 + nw^2 + (n^2+1)uv + (n^2+1)uw + (n^2+1)vw = 0$, es decir, cuando el punto P esté situado sobre la cónica de ecuación:

$$nx^2 + ny^2 + nz^2 + (n^2+1)xy + (n^2+1)xz + (n^2+1)yz = 0$$

que es una elipse, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 2n & n^2+1 & n^2+1 \\ n^2+1 & 2n & n^2+1 \\ n^2+1 & n^2+1 & 2n \end{vmatrix} = 2(n-1)^4(n^2+n+1) \neq 0$$

TRIÁNGULOS CABRI

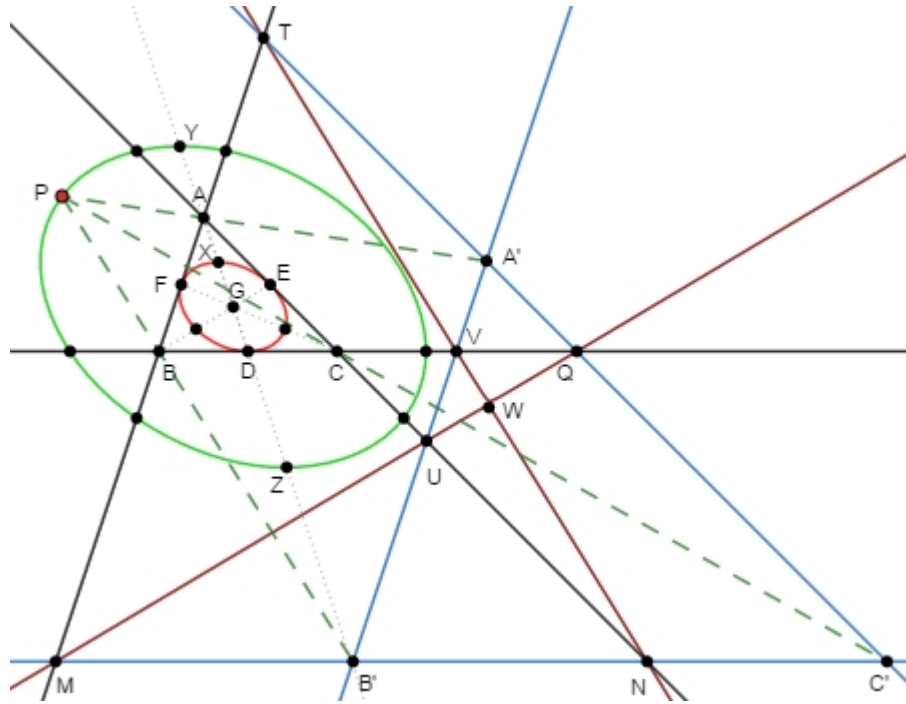
y su discriminante es:

$$\Delta' = -\frac{3(n-1)^4}{4} < 0$$

Además, esta elipse corta a las rectas que contienen a los lados del triángulo ABC en los puntos:

$$\{(0 : -1 : n), (0 : n : -1), (-1 : 0 : n), (n : 0 : -1), (-1 : n : 0), (n : -1 : 0)\}$$

todos ellos exteriores al triángulo ABC , por lo que el triángulo ABC (y, por tanto, su inelipse de Steiner) está situado en su interior y, por tanto, sobre los puntos de esta elipse nuestra cónica es un par de rectas secantes, una de las cuales contiene a los puntos M , Q y U y la otra contiene a los puntos N , T y V .



Finalmente, a la vista del gráfica anterior, parece ser que esta elipse es homotética, respecto del punto G , a la inelipse de Steiner del triángulo ABC , lo cual vamos a probar a continuación. Si así fuese, la homotecia que transforma la inelipse de Steiner en esta elipse, debería transformar el punto medio $X = (4 : 1 : 1)$ del segmento AG en el punto:

$$Y = (n-1+2\sqrt{n^2+n+1} : n-1-2\sqrt{n^2+n+1} : n-1-2\sqrt{n^2+n+1})$$

de intersección entre esta elipse y la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC , lo cual significa que la razón de homotecia debería ser:

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : k_n = \frac{GY}{GX} = \sqrt{\frac{(-a^2+2b^2+2c^2)(n^2+n+1)}{9(n-1)^2}} = \frac{2\sqrt{n^2+n+1}}{n-1}$$

TRIÁNGULOS CABRI

lo cual es cierto ya que, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, la homotecia con centro G y razón $k_n = \frac{2\sqrt{n^2+n+1}}{n-1}$ transforma la elipse de ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0$$

en la elipse de ecuación:

$$nx^2 + ny^2 + nz^2 + (n^2 + 1)xy + (n^2 + 1)xz + (n^2 + 1)yz = 0$$

Este hecho nos asegura, además, que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{n^2+n+1}}{n-1} = 2$$

lo cual significa, que, cuando el valor de n aumenta indefinidamente, esta elipse se aproxima a la circunelipse de Steiner del triángulo ABC (ya que esta última es homotética de razón 2, con respecto al punto G , de la inelipse de Steiner del triángulo ABC).