Debido al coronavirus, esta edición de *triánguloscabri* será del 16 de Enero al 28 de febrero de 2021.

Propuesto por Antonio Casas Pérez, profesor jubilado del Departamento de Matemática Aplicada al Urbanismo, a la Edificación y al Medio Ambiente, Universidad Politécnica de Madrid

***Problema* 976.-** *Sea ABC un triángulo, P un punto en su plano y h un número positivo. El triángulo $A'B'C'$ homotético de ABC con centro de homotecia P y razón h comparte las mismas cevianas de P. Probar que los 6 puntos de intersección de las prolongaciones de los lados de $A'B'C'$ y las prolongaciones de ABC que no son A, B, C, A', B', C' pertenecen a una misma cónica y al variar h los centros de tales cónicas describen un segmento rectilíneo.*

Probar además, que dicha cónica es una parábola si el punto P está situado sobre la in-elipse *de Steiner del triángulo ABC, es una elipse si es interior a dicha* in-elipse *y una hipérbola si exterior a la misma.*

Casas, A. (2021): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

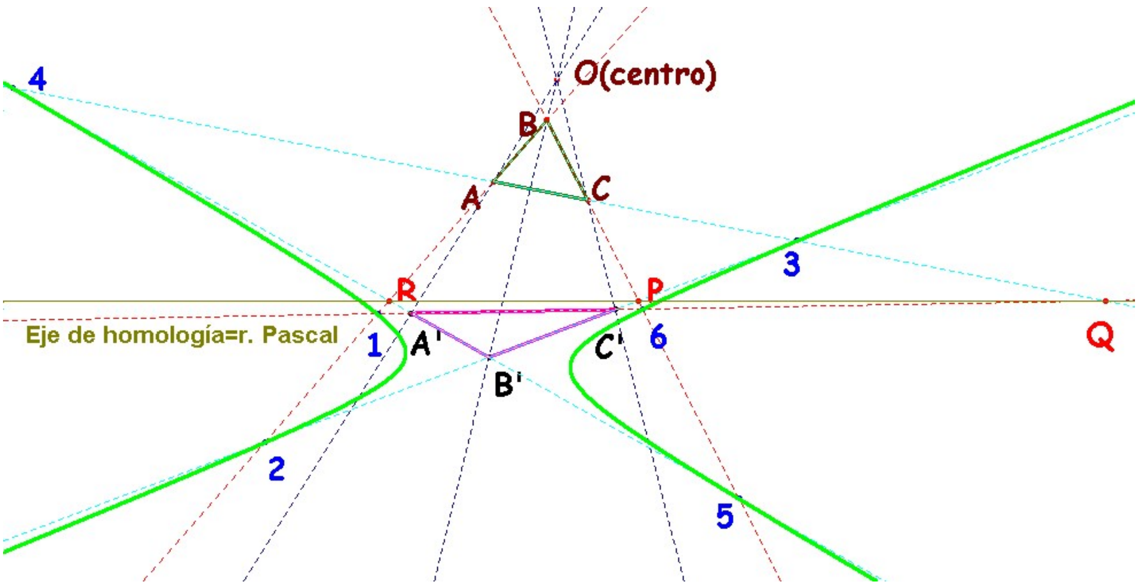
En la primera quincena de febrero de 2005 en esta misma revista se publicó el

Problema 216.- *Dados dos triángulos homológicos, los puntos de intersección de los lados no homólogos están sobre una misma cónica.*

Pedret, J.M. (2005). Comunicación personal

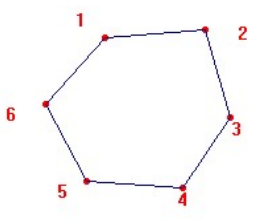
Solución

Es una aplicación inmediata del recíproco del teorema de Pascal.



En la figura tenemos los triángulos homológicos y los puntos de corte de los lados no homólogos, que etiquetamos con números del 1 al 6.

Observando estos puntos vemos que elegidos de forma adecuada dos a dos, las rectas que forman, son los seis lados de los triángulos de partida, que por ser homológicos se cortan en puntos P, Q y R del eje de homología.



Solo hay que tomar una ordenación adecuada de ellos para formar un hexágono, cuya recta de Pascal sea el eje de homología. En el hexágono –convexo o no– de vértices **123456** son opuestos los lados 12 y 45, 23 y 56, 34 y 61. En nuestro caso **12**=AB; **45**=A’B’; **23**=B’C’; **56** =BC; **34**=AC y por último **61** =A'C'. El recíproco del teorema de Pascal nos asegura que los seis puntos yacen en una cónica. c.q.d.

La homotecia es una homología en la cual el eje está en el infinito. Con esto resolvemos la primera parte.

Para tratar de clasificar la cónica y ver el lugar geométrico del centro tenemos que tomar coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC.

Las ecuaciones de la homotecia con centro $P(u{:}\,v{:}\,w)$ y razón h, que transforma $X(x.\,y{:}\,z)$ en $X'(x'{:}\,y'{:}\,z')$ están dadas por [1]:

$$\boldsymbol{x' = hx(u+v+w) + (1-h)u(x+y+z)}$$

$$\boldsymbol{y' = hy(u+v+w) + (1-h)v(x+y+z)}$$

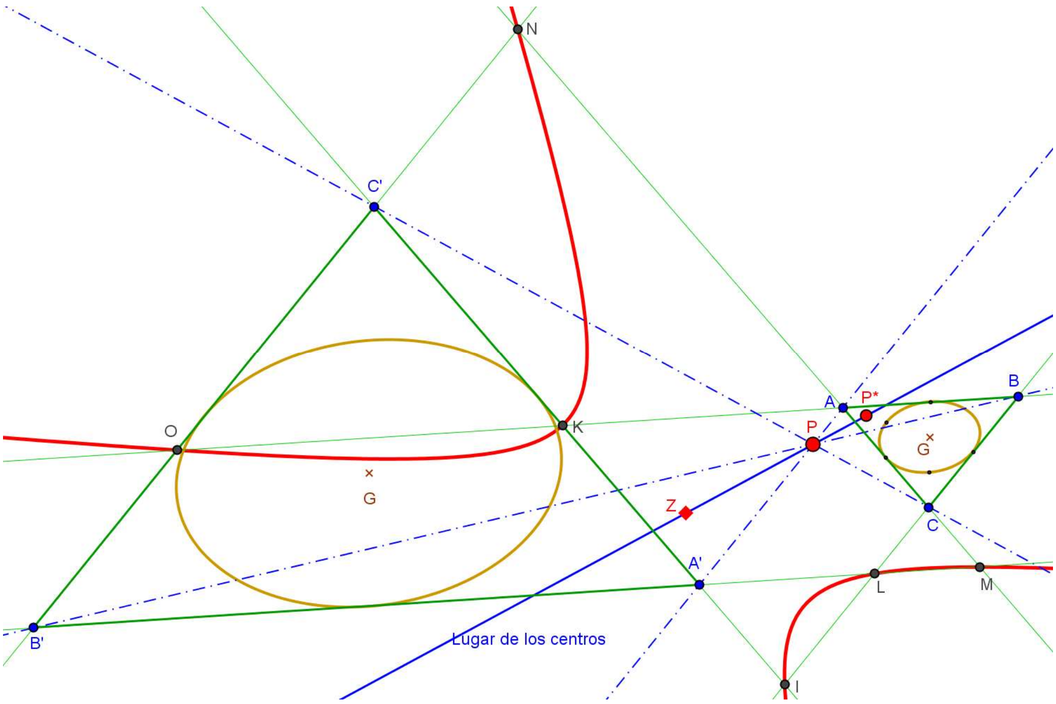
$$\boldsymbol{z' = hz(u+v+w) + (1-h)w(x+y+z)}$$

Las ecuaciones de las rectas $PA, PB\ y\ PC$ son:

$PA{:}\ wy - vz = 0;\ PB{:}\ wx - uz$ =0 y $PC{:}\ vx - uy = 0$. Los vértices del triángulo $A'B'C'$, homotético de ABC por la homotecia de razón h y centro P son los puntos de coordenadas:

$$A' = (h(u+v+w) + (1-h)u{:}\,(1-h)v{:}\,(1-h)w) = (h(v+w) + u{:}\,(1-h)v{:}\,(1-h)w);$$

$B' = \big((1-h)u{:}\,h(w+u) + v{:}\,(1-h)w\big)$ y $C' = ((1-h)u{:}\,(1-h)v{:}\,h(u+v) + w)$.



Ahora hay que calcular las ecuaciones de los lados del triángulo T', homotético de $T = \Delta ABC$.

Para no hacer tediosa la lectura con los cálculos, éstos se detallarán al final del problema.

Los seis puntos que definen la cónica son:

$L = \big(0{:}\,u+v+hw{:}\,w(1-h)\big);\ M = \big(u+v+hw{:}\,0{:}\,w(1-h)\big);\ O = (u(1-h){:}\,v+w+hu{:}\,0);$

$N = (u(1-h){:}\,0{:}\,v+w+hu);\ K = (hv+u+w{:}\,v(1-h){:}\,0);\ I = (0{:}\,(1-h)v{:}\,hv+u+w)$.

[1] Puede verse en Montesdeoca, A. *Geometría en baricéntricas,* (5.17) p. 108

Consideramos las cónicas que pasan por el cuadrilátero $MNKO$: son opuestos MN (recta $AC, y = 0$) y KO (recta $AB, z = 0$) por un lado y por otro ON (recta $B'C'$) y MK que vamos a determinar. Formamos el haz de rectas y le obligamos a pasar por L o por I (ha de pasar por ambos).

La ecuación de la recta MK es $vwx(h-1) + wy(hv + u + w) + vz(hw + u + v) = 0$ y la de $B'C'$: $x(hu + v + w) + uy(h-1) + uz(h-1) = 0$.

Al haz de cónicas

$$\alpha yz + \beta[vwx(h-1) + wy(hv + u + w) + vz(hw + u + v))(x(hu + v + w) + uy(h-1) + uz(h-1)] = 0$$

le imponemos la condición de pasar por el punto L (o por el I, ya sabemos que ha de pasar por ambos) y obtenemos para los parámetros los valores $\alpha = u(u + v + w)^2$ y $\beta = 1$.

Con ellos tendremos para la cónica la ecuación

$$\boxed{\boldsymbol{u(u+v+w)^2yz + [vwx(h-1) + wy(hv+u+w) + vz(hw+u+v)][x(hu+v+w) + uy(h-1) + uz(h-1)] = 0.}}$$

Para la cónica del infinito hacemos $z = -(x + y)$ y obtenemos después de operar, suprimiendo el factor $(u + v + w)^2$ cuyos ceros son todos los puntos de la recta del infinito, obtenemos finalmente:

$$\boxed{\boldsymbol{vx^2 + (u+v-w)xy + uy^2 = 0.}}$$

Su discriminante es $\Delta = \boldsymbol{(u+v-w)^2 - 4uv}$ y por tanto según sea positivo, negativo o nulo la cónica en cuestión será una hipérbola, una elipse o una parábola.

Teniendo en cuenta que u, v, w, son las coordenadas baricéntricas de un punto, el centro de homotecia P, la ecuación $(u + v - w)^2 - 4uv = 0$ es la de la **elipse de Steiner inscrita** en el triangulo ABC (es tangente a los lados en los puntos medios y su centro es el baricentro del mismo), con lo cual llegamos a la conclusión que la cónica que estamos estudiando es una **elipse si $\boldsymbol{P}$ está en el interior** de la *in-elipse* de Steiner, una **hipérbola si está fuera** y una **parábola si está sobre ella**, como se pretendía demostrar.

En la segunda figura se ha tomado $h = -3{,}8$ y $P(3{:}-1{:}\,1)$, fuera de la elipse de Steiner y por ello la cónica es una hipérbola.

Cálculo del centro y su lugar geométrico.

Vamos a calcular el centro de la cónica como intersección de dos diámetros de la misma. Los segmentos IL y ON son paralelos. La recta que une sus puntos medios es un diámetro de la cónica. También son paralelos los segmentos MN e IK. Uniendo sus puntos medios obtenemos sendos diámetros que nos permitirán calcular el centro.

Realizados los cálculos oportunos, el punto medio de IL es $(0{:}\, u + 2v + h(w - v){:}\, u + 2w - h(w - v))$ y el de ON es $(2u(1 - h){:}\, hu + v + w{:}\, hu + v + w)$.

El diámetro correspondiente es

$$(h-1)(v-w)(hu+v+w)x + u(h-1)(h(v-w)+u+2w)y + u(h-1)(h(v-w)-u-2v)z = 0$$

El punto medio del segmento MN es $(2u+v+h(w-u){:}\,0{:}\,2w+v-h(w-u))$ y el punto medio de IK es $(hv+u+w{:}\,2v(1-h){:}\,hv+u+w)$, de donde resulta el diámetro

$$v(h-1)(h(u-w)x+v+2w)+(hv+u+w)(h(u-w)y-u+w)+v(h-1)(h(u-w)-2u-v)z=0$$

El centro es la solución del sistema formado con estas dos rectas. El punto Z solución del mismo tiene las siguientes coordenadas

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{hu[v^2+w^2-u(v+w)]+u[u(-u+v+w)+2vw]} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{hv[w^2+u^2-v(w+u)]+v[v(-v+w+u)+2wu]} \\ \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{hw[u^2+v^2-w(u+v)]+w[w(-w+u+v)+2uv]} \end{aligned}}$$

Si definimos $f(u,v,w)=u[v^2+w^2-u(v+w)]$ y $g(u,v,w)=u[u(-u+v+w)+2vw]$, funciones reales, tendremos que esa expresión del centro puede ponerse ahora como

$$\begin{aligned} x &= hf(u,v,w)+g(u,v,w) \\ y &= hf(v,u,w)+g(v,u,w) \\ z &= hf(w,v,u)+g(w,v,u) \end{aligned} \qquad (E)$$

O de forma mucho más abreviada aún

$$Z=hF+G$$

donde G **NO ES** el baricentro, sino el punto definido por g en P y sus permutaciones circulares:

$$G=(g(u,v,w){:}\,g(v,u,w){:}\,g(w,v,u))$$

La suma de los coeficientes de h (la suma del valor de la función f en P y los de sus permutaciones circulares) es cero, por tanto esa expresión abreviada es la de una recta con dirección el vector de coeficientes de h (o bien el punto del infinito) y que pasa por el punto definido por G.

Para eliminar h y obtener la ecuación de esa recta tendremos anular el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ f(u,v,w) & f(v,u,w) & f(w,v,u) \\ g(u,v,w & g(v,u,w) & g(w,v,u) \end{vmatrix}=0$$

y tendremos la ecuación que verifica el centro de la cónica.

Tenemos $f(u,v,w)+f(v,u,w)+f(w,v,u)=0$ y también $g(u,v,w)+g(v,u,w)+g(w,v,u)=(u+v+w)\cdot[4uv-(u+v-w)^2]$. Es decir $x+y+z=-(u+v+w)\cdot[(u+v-w)^2-4uv]$. Por tanto, el punto Z estará en el infinito si es nula esa expresión, se tiene una parábola. Es lo mismo que hemos obtenido antes en el caso del discriminante de la ecuación de los puntos del infinito nulo.

Desarrollando y simplificando el determinante que da **la ecuación de los centros** se obtiene la expresión

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{v-w}{u}x+\frac{w-u}{v}y+\frac{u-v}{w}z=0}}$$

y se puede comprobar que los puntos $P=(u{:}\,v{:}\,w)$ y $G=(g(u,v,w){:}\,g(v,u,w){:}\,g(w,v,u))$ están sobre esa recta. También está sobre ella el punto $P^*=(u^2{:}\,v^2{:}\,w^2)$ y tiene una expresión más sencilla.

De todo esto resulta que elegido P sabremos según su posición respecto la *elipse inscrita de Steiner* si la cónica es de un tipo o de otro y después, con el punto $P^*=(u^2{:}\,v^2{:}\,w^2)$, salvo que la cónica sea una parábola, podremos construir la recta donde están los centros de las cónicas obtenidas al variar la razón de homotecia.

Detalle de algunos cálculos.

El lado $A'B'$, corta a la recta $BC: x = 0$ en el punto $L = (0: u + v + hw: w(1 - h))$, solución de esta ecuación:

$$\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ h \cdot (v + w) + u & (1 - h) \cdot v & (1 - h) \cdot w \\ (1 - h) \cdot u & h \cdot (w + u) + v & (1 - h) \cdot w \end{vmatrix} = 0$$

y a $CA: y = 0$ en el punto $M = (u + v + hw: 0: w(1 - h))$, solución de esta ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & z \\ h \cdot (v + w) + u & (1 - h) \cdot v & (1 - h) \cdot w \\ (1 - h) \cdot u & h \cdot (w + u) + v & (1 - h) \cdot w \end{vmatrix} = 0$$

El lado $C'B'$, corta a la recta $AB: z = 0$ en el punto $O = (u(1 - h): v + w + hu: 0)$, solución de esta ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ (1 - h) \cdot u & (1 - h) \cdot v & h \cdot (u + v) + w \\ (1 - h) \cdot u & h \cdot (w + u) + v & (1 - h) \cdot w \end{vmatrix} = 0$$

y a $CA: y = 0$ en el punto $N = (u(1 - h): 0: v + w + hu)$, solución de esta ecuación

$$\begin{vmatrix} x & 0 & z \\ (1 - h) \cdot u & (1 - h) \cdot v & h \cdot (u + v) + w \\ (1 - h) \cdot u & h \cdot (w + u) + v & (1 - h) \cdot w \end{vmatrix} = 0$$

Finalmente el lado $C'A'$, corta a la recta $AB: z = 0$ en el punto

$K = (hv + u + w: v(1 - h): 0)$, solución de esta ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ (1 - h) \cdot u & (1 - h) \cdot v & h \cdot (u + v) + w \\ h \cdot (v + w) + u & (1 - h) \cdot v & (1 - h) \cdot w \end{vmatrix} = 0$$

y a $BC: x = 0$ en el punto $I = (0: (1 - h)v: hv + u + w)$, solución de esta ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ (1 - h)u & (1 - h)v & h(u + v) + w \\ h(v + w) + u & (1 - h)v & (1 - h)w \end{vmatrix} = 0$$

■