

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 977. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC , para cada terna de números positivos (u, v, w) , se consideran dos puntos D y E interiores al segmento BC tales que:

$$BD : DE : EC = u : v : w$$

y un punto T interior a dicho triángulo tal que:

$$\overrightarrow{AT} = \left(\frac{v}{u+v+w}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{w}{u+v+w}\right)\overrightarrow{AC}$$

Determinar el lugar geométrico que debe describir el punto T para que la circunferencia circunscrita al triángulo ADE corte a los segmentos AC y AB en puntos P y Q , respectivamente, tales que $BP = CQ$. Para cada punto T situado sobre dicho lugar geométrico, construir gráficamente los puntos D y E correspondientes.

Solución:

Si (u, v, w) es una terna de números positivos, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , como:

$$\begin{cases} D = (0 : v + w : u) \\ E = (0 : w : u + v) \end{cases}$$

entonces, la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo ADE es:

$$-a^2u(u+v)y^2 - a^2w(v+w)z^2 + [c^2(u+v+w)^2 - a^2u(u+v)]xy + [b^2(u+v+w)^2 - a^2w(v+w)]xz + [v(u+v+w) + 2uw]yz = 0$$

por lo que, resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones, resulta que:

$$\begin{cases} P = (a^2u(u+v) : c^2(u+v+w)^2 - a^2u(u+v) : 0) \\ Q = (a^2w(v+w) : 0 : b^2(u+v+w)^2 - a^2w(v+w)) \end{cases}$$

luego:

$$\begin{cases} BP = \frac{a^2u(u+v)}{c(u+v+w)^2} \\ CQ = \frac{a^2w(v+w)}{b(u+v+w)^2} \end{cases}$$

y, por tanto:

$$0 = BP - CQ = \frac{a^2u(u+v)}{c(u+v+w)^2} - \frac{a^2w(v+w)}{b(u+v+w)^2} = \frac{a^2[bu^2 + cw^2 + buv + cvw]}{bc(u+v+w)^2}$$

lo cual significa que el punto:

$$T = \left(1 - \frac{v}{u+v+w} - \frac{w}{u+v+w} : \frac{v}{u+v+w} : \frac{w}{u+v+w}\right) = \left(\frac{u}{u+v+w} : \frac{v}{u+v+w} : \frac{w}{u+v+w}\right) = (u : v : w)$$

está situado sobre la cónica de ecuación:

$$bx^2 + cz^2 + bxy + cyz = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

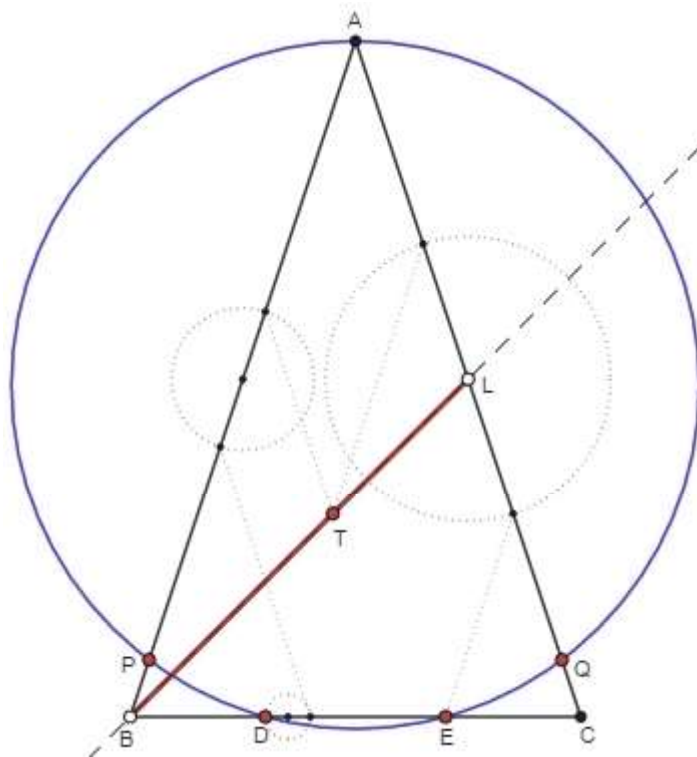
TRIÁNGULOS CABRI

Vamos a distinguir dos casos:

- ① Si $b = c$, entonces, la ecuación de esta cónica es:

$$(x - z)(x + y + z) = 0$$

y corresponde al par de rectas formado por la mediana correspondiente al vértice B del triángulo ABC y la recta del infinito. Por tanto, en este caso, el punto T describe el segmento abierto BL , siendo L el punto medio del segmento AC .



- ② Si $b \neq c$, entonces, esta cónica es una hipérbola que pasa por el punto $B = (0 : 1 : 0)$ y por el punto $F = (1 : -1 : 1)$ simétrico del punto B respecto del punto medio L del segmento AC , ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 2b & b & 0 \\ b & 0 & -c \\ 0 & -c & -2c \end{vmatrix} = 2bc(b - c) \neq 0$$

y tiene dos puntos en la recta del infinito, cuyas coordenadas están determinadas por las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = x + y + z \\ 0 = bx^2 + cz^2 + bxy + cyz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = (1 : -1 : 0) = AB_{\infty} \\ I_2 = (0 : 1 : -1) = BC_{\infty} \end{cases}$$

TRIÁNGULOS CABRI

Además, podemos obtener las coordenadas de su centro M (conjugado de la recta del infinito) a partir del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ b & 0 & -c \\ 0 & -c & -2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ b & 0 & -c \\ 0 & -c & -2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow M = (-c : 0 : b)$$

tratándose del punto de la recta A situado a distancia $\frac{b^2}{|b-c|}$ (apuntando hacia el punto C si $b > c$ o hacia el lado contrario si $b < c$). Finalmente, como conocemos cuatro puntos de esta cónica (los puntos B y F y sus respectivos puntos simétricos respecto de su centro M), aún necesitamos determinar, al menos, otro punto, que puede ser cualquiera de sus puntos de intersección con la recta AC :

$$\begin{cases} N_1 = (\sqrt{c} : 0 : \sqrt{b}) \\ N_2 = (-\sqrt{c} : 0 : \sqrt{b}) \end{cases}$$

(simétricos uno del otro respecto del centro M de la cónica)

Por tanto, en este caso, el punto T describe el segmento hiperbólico abierto BN_1 .

