Problema 979

Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que la circunferencia que pasa por el punto A, por el punto medio N del segmento AB y por el punto medio M del segmento AC sea tangente a la recta BC.

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz).

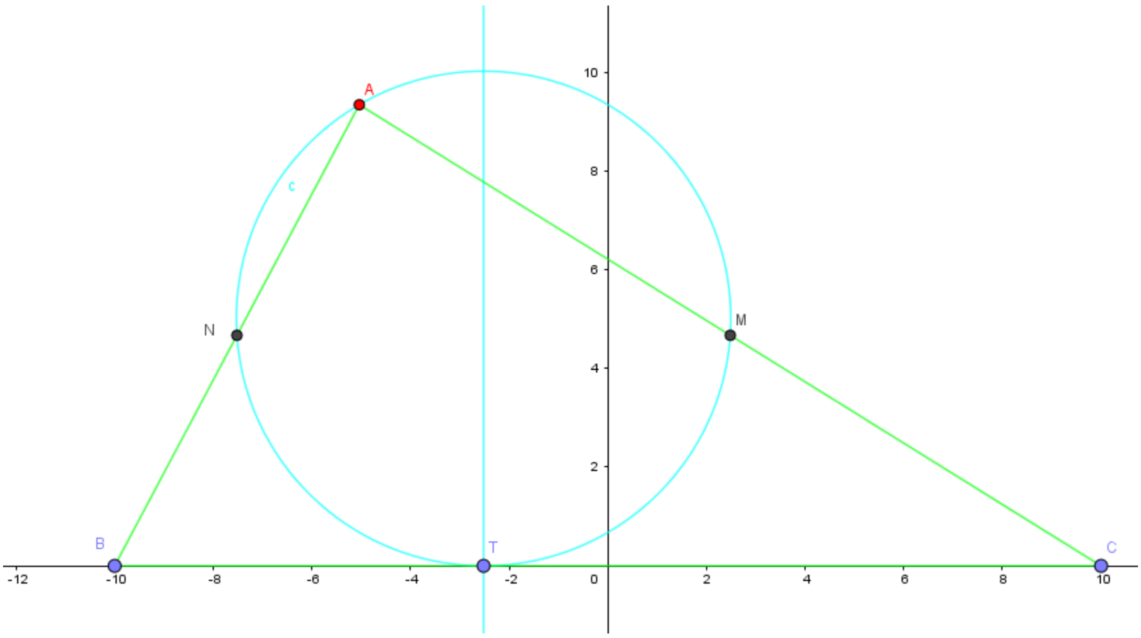
<u>Solución propuesta por Antonio Casas Pérez</u>

El problema propuesto por Miguel Ángel, tiene los suficientes elementos geométricos para dar una solución que utilice solamente argumentos geométricos, pero de momento no he sido capaz de obtenerla más que por métodos analíticos. Seguiré pensando.

<u>Solución analítica</u>

Podemos suponer que BC es el intervalo del eje x [-10,10]

Fijemos un punto T cualquiera de BC y busquemos el punto A que completa la construcción del enunciado,



Los puntos A,M,N,T pertenecen a la misma circunferencia de ecuación

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Ponemos coordenadas

A=(a1,a2) , T=(λ,0), (x_0,y_0)=(λ,r), N=((a1-10)/2,a2/2), M=((a1+10)/2,a2/2)

Imponemos que A,T,N,M pertenezcan a C y obtenemos el sistema

$$(a1-\lambda)^2+(a2-r)^2=r^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\,a1 - 5 - \lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\,a2 - r\right)^2 = r^2$$
$$\left(\frac{1}{2}\,a1 + 5 - \lambda\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\,a2 - r\right)^2 = r^2$$

Y de él

$$a1 = 2\,\lambda,\ a2 = \sqrt{-2\,\lambda^2 + 100}\,,\ r = \frac{1}{4}\,\frac{\left(\lambda^2 - 100\right)\sqrt{-2\,\lambda^2 + 100}}{\lambda^2 - 50}$$

Lo que nos da las coordenadas de A y por tanto el lugar.

Lugar

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{400 - 2\,x^2}$$

¡ Ojo ¡, en la ecuación anterior x puede variar en el intervalo $[-10\sqrt{2}, 10\sqrt{2}]$ pero no hay que olvidar que λ=a1/2 y que T=(λ,0), por lo que el lugar se obtiene con λ en el intervalo $[-5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}]$ esto es, cuando T recorre dicho intervalo.

La raíz y el cuadrado ponen de manifiesto la simetría del lugar que se podía observar antes de hacer ningún cálculo.

También podemos escribir la ecuación del lugar como $x^2 + 2y^2 = 200$ y vemos que es la elipse de focos B y C que pasa por el punto (0,10)