Problema 979. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que la circunferencia que pasa por el punto A, por el punto medio N del segmento AB y por el punto medio M del segmento AC sea tangente a la recta BC.

Solución:

Si A es uno de estos puntos, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como:

$$\begin{cases} M=(1:0:1) \\ N=(1:1:0) \end{cases}$$

entonces, la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo ANM es:

$$2(c^2xy+b^2xz+a^2yz)-(c^2y+b^2z)(x+y+z)=0$$

siendo sus puntos de intersección con la recta BC:

$$\begin{cases} T_1=\left(0:2a^2+b^2-c^2+\sqrt{(2a^2-b^2+c^2)^2-8a^2c^2}:2a^2-b^2+c^2-\sqrt{(2a^2-b^2+c^2)^2-8a^2c^2}\right) \\ T_2=\left(0:2a^2+b^2-c^2-\sqrt{(2a^2-b^2+c^2)^2-8a^2c^2}:2a^2-b^2+c^2+\sqrt{(2a^2-b^2+c^2)^2-8a^2c^2}\right) \end{cases}$$

por lo que, para que esta circunferencia sea tangente a la recta BC ha de ocurrir que $T_1=T_2$, es decir:

$$(2a^2-b^2+c^2)^2-8a^2c^2=0$$

Además, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio L del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento BC, si $A=(x,y)\ (y\neq 0)$, como:

$$\begin{cases} C=(1,0) \\ B=(-1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=BC=2 \\ b=AC=\sqrt{(x-1)^2+y^2} \\ c=AB=\sqrt{(x+1)^2+y^2} \end{cases}$$

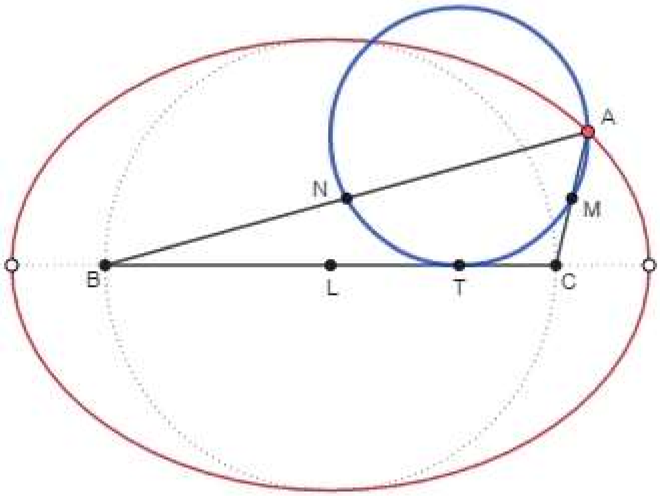
entonces:

$$\frac{x^2}{2}+y^2=1$$

lo cual significa que el punto A debe estar situado sobre la elipse cuyos focos son los puntos B y C y es tangente a la circunferencia cuyo diámetro es BC, exceptuando sus puntos de intersección con la recta BC, ya que para estos puntos no tendríamos un triángulo.

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega