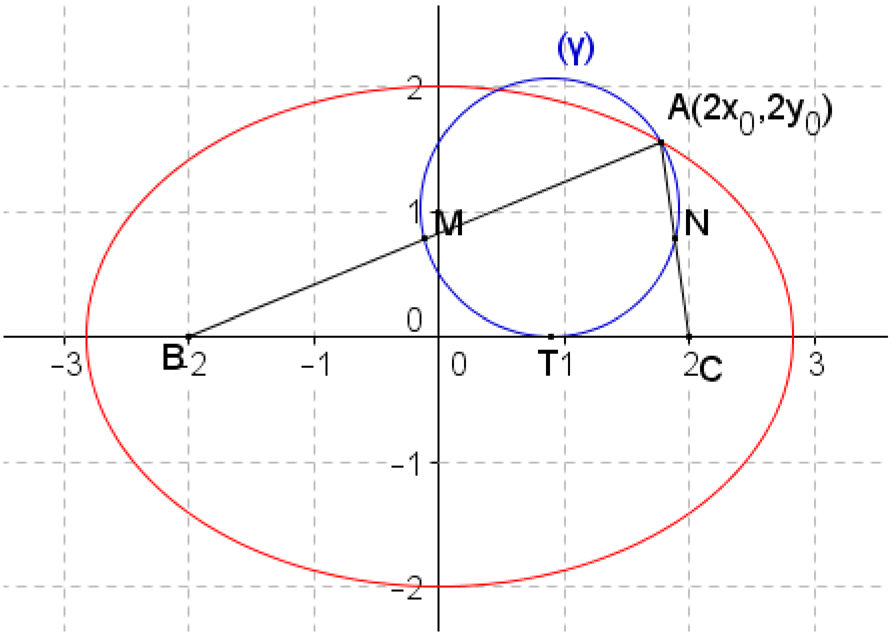
Problema n° 979
Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que la circunferencia que pasa por el punto A, por el punto medio N del segmento AB y por el punto medio M del segmento AC sea tangente a la recta BC.
Pérez, M. A. (2021): Comunicación personal

Solution proposée par Philippe Fondanaiche

Réponse : avec BC = a, le lieu de A est une ellipse de foyers B et C et de demi-axes a et a$\sqrt{2}$.



Dans un repère orthonormé, sans perte de généralité, on retient les coordonnées suivantes des sommets du triangle ABC : $A(2x_0,2y_0)$, $B(-2,0)$ et $C(2,0)$

On recherche l'équation du cercle (γ) circonscrit au triangle AMN (avec M milieu de AB et N milieu de AC). Elle est de la forme $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$.

Comme on recherche le point de tangence de ce cercle avec l'axe des abscisses y = 0, il suffit de calculer les coefficients A,B et D de l'équation $Ax^2 + Bx + D = 0$ et d'exprimer l'existence d'une racine double, à savoir $B^2 = 4AD$.

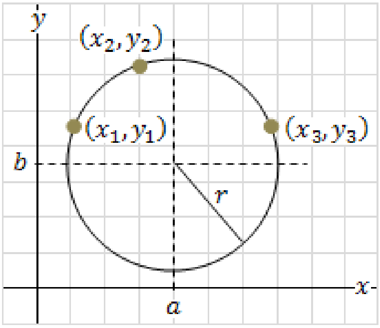
D'après les formules données en annexe pour calculer A,B er D en fonction des coordonnées de trois points $A(x_0,y_0)$, $M(x_0 - 1,y_0)$ et $N(x_0 + 1,y_0)$, on obtient : $A = 2y_0$, $B = -4x_0y_0$ et $D = 4y_0(x_0^2 + y_0^2 - 1)$.

D'où l'équation $x_0^2 + 2y_0^2 = 2$.

En posant $x = 2x_0$ et $y = 2y_0$, on en déduit l'équation du lieu de A : $x^2 + 2y^2 = 8$ qui est celle de l'ellipse (tracée en rouge) de foyers B et C et passant par les points de coordonnées $(2\sqrt{2},0)$ et$(0,2)$

Annexe

Equation of a circle passing through 3 points (x_1, y_1) (x_2, y_2) and (x_3, y_3)



The equation of the circle is described by the equation:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$$

After substituting the three given points which lies on the circle we get the set of equations that can be described by the determinant:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ {x_1}^2+{y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2+{y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2+{y_3}^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

The coefficienta A, B, C and D can be found by solving the following determinants:

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad B = -\begin{vmatrix} {x_1}^2+{y_1}^2 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2+{y_2}^2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2+{y_3}^2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} {x_1}^2+{y_1}^2 & x_1 & 1 \\ {x_2}^2+{y_2}^2 & x_2 & 1 \\ {x_3}^2+{y_3}^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \quad D = -\begin{vmatrix} {x_1}^2+{y_1}^2 & x_1 & y_1 \\ {x_2}^2+{y_2}^2 & x_2 & y_2 \\ {x_3}^2+{y_3}^2 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

The values of A, B, C and D will be after solving the determinants:

$$A = x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + x_2y_3 - x_3y_2$$
$$B = ({x_1}^2 + {y_1}^2)(y_3 - y_2) + ({x_2}^2 + {y_2}^2)(y_1 - y_3) + ({x_3}^2 + {y_3}^2)(y_2 - y_1)$$
$$C = ({x_1}^2 + {y_1}^2)(x_2 - x_3) + ({x_2}^2 + {y_2}^2)(x_3 - x_1) + ({x_3}^2 + {y_3}^2)(x_1 - x_2)$$
$$D = ({x_1}^2 + {y_1}^2)(x_3y_2 - x_2y_3) + ({x_2}^2 + {y_2}^2)(x_1y_3 - x_3y_1) + ({x_3}^2 + {y_3}^2)(x_2y_1 - x_1y_2)$$

Center point (x, y) and the radius of a circle passing through 3 points (x_1, y_1) (x_2, y_2) and (x_3, y_3) are:

$$x = \frac{({x_1}^2 + {y_1}^2)(y_2 - y_3) + ({x_2}^2 + {y_2}^2)(y_3 - y_1) + ({x_3}^2 + {y_3}^2)(y_1 - y_2)}{2(x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + x_2y_3 - x_3y_2)} = -\frac{B}{2A}$$

$$y = \frac{({x_1}^2 + {y_1}^2)(x_3 - x_2) + ({x_2}^2 + {y_2}^2)(x_1 - x_3) + ({x_3}^2 + {y_3}^2)(x_2 - x_1)}{2(x_1(y_2 - y_3) - y_1(x_2 - x_3) + x_2y_3 - x_3y_2)} = -\frac{C}{2A}$$

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{\frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2}}$$