

Propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz)

Problema 980

1) Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que el vértice A, el incentro I y el centro N de la circunferencia de Euler del triángulo ABC estén alineados.

2) Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que el vértice B, el incentro I y el centro N de la circunferencia de Euler del triángulo ABC estén alineados.

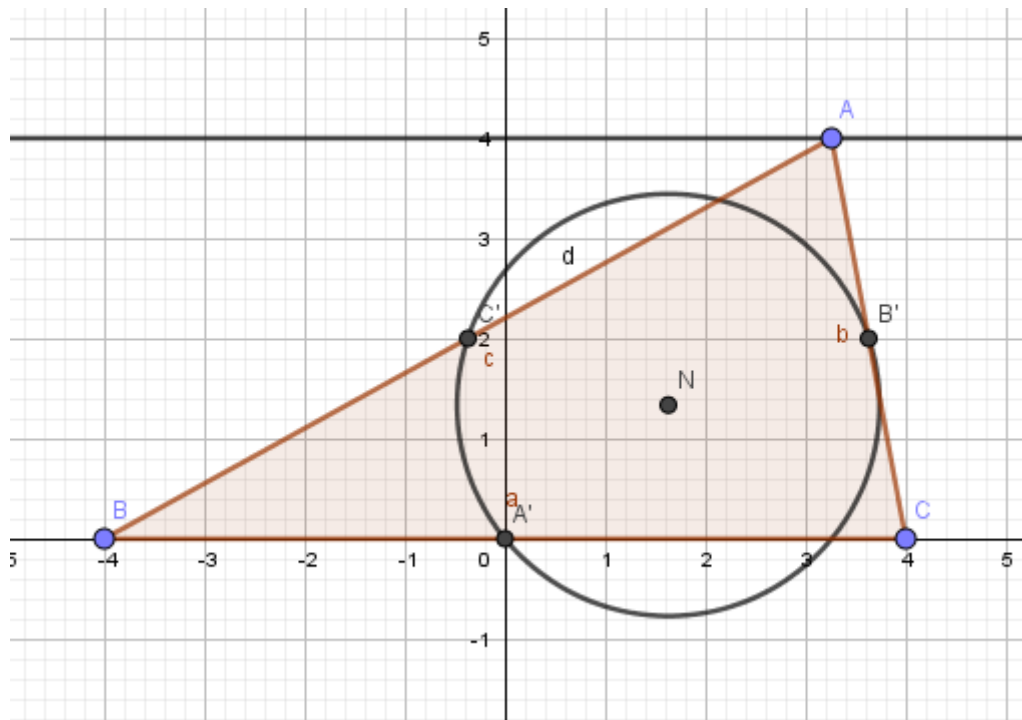
Pérez, M. A. (2021): Comunicación personal

Solución del director.

1) Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que el vértice A, el incentro I y el centro N de la circunferencia de Euler del triángulo ABC estén alineados.

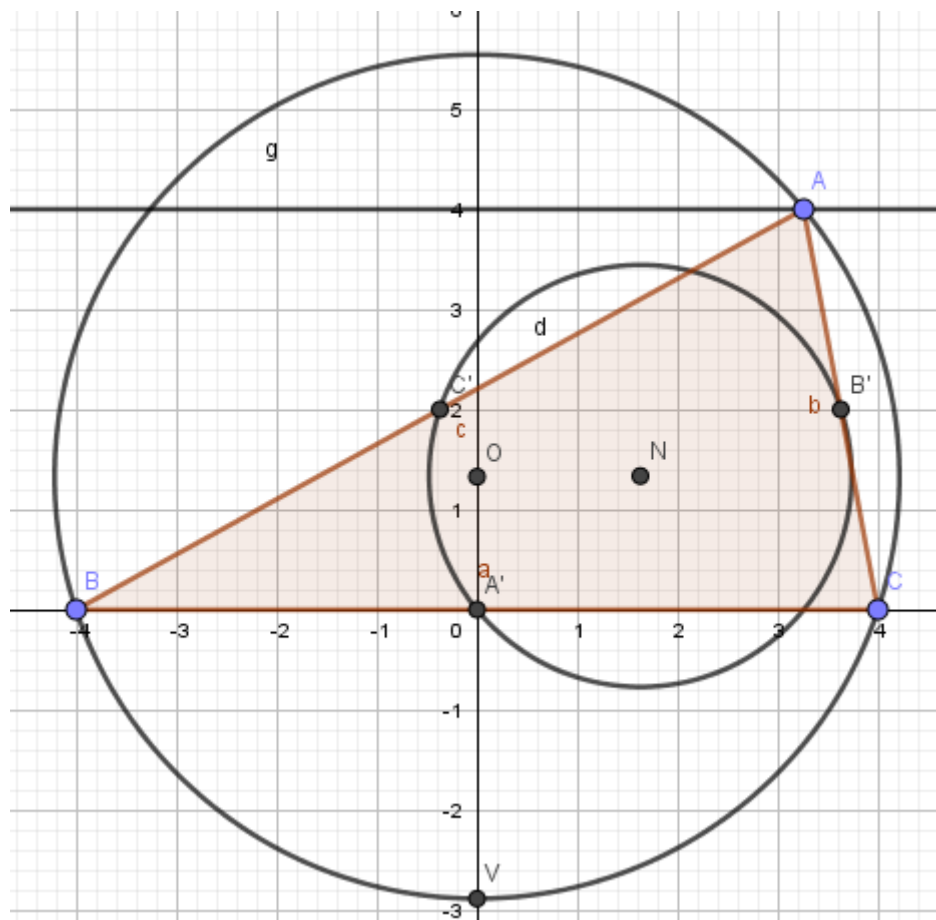
Estudiemos un caso concreto con coordenadas.

Sea $B(-4,0)$, $C(4,0)$ y A un punto genérico situado en la recta $y=4$, $A(4m,4)$



N es el centro de la circunferencia $A'(0,0)$, $B'(2m+2,2)$, $C'(2m-2, 2)$, que es $N(2m, 2-m^2)$

La circunferencia circunscrita a ABC tiene de centro $O(0,2m^2)$



El circunradio es $R = \sqrt{16 + 4m^4}$

Los puntos de corte de la circunferencia circunscrita con la mediatriz de BC son

$(0, 2m^2 \pm \sqrt{16 + 4m^4})$ y nos interesa $V(0, 2m^2 - \sqrt{16 + 4m^4})$ para la bisectriz del ángulo BAC.

Así que lo pedido es que los vectores $A(4m, 4)$, $N(2m, 2 - m^2)$ y

$A(4m, 4)$, $V(0, 2m^2 - \sqrt{16 + 4m^4})$ sean proporcionales.

Una solución es $m=0$, pues $A(0, 4)$, $N(0, 2)$ y $A(0, 4)$, $V(0, -4)$ lo verifican. S decir, ABC isósceles en A.

Otra solución es:

$$\frac{4 - 2m^2 + \sqrt{16 + 4m^4}}{4m} = \frac{4 - 2 + m^2}{2m}$$

De donde $m = \sqrt[4]{\frac{4}{3}}$

Luego el punto buscado es $A(4\sqrt[4]{\frac{4}{3}}, 4)$. El circunradio de tal triángulo es por tanto $R = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

Así, $\text{sen } \alpha = \frac{a}{2R} = \frac{8}{2 \frac{8\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \alpha = 60^\circ$

Así la solución es el arco capaz de 60° para BC y la mediatriz de BC.

2) Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que el vértice B, el incentro I y el centro N de la circunferencia de Euler del triángulo ABC estén alineados.

Para este caso también hay dos lugares:

La circunferencia de centro B y radio BC

La recta s tal que contiene a B y forma 60° con BC.

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado. Sevilla.

