Problema 980. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega)

① Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que el vértice A, el incentro I y el centro N de la circunferencia de Euler del triángulo ABC estén alineados.

② Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que debe describir el punto A para que el vértice B, el incentro I y el centro N de la circunferencia de Euler del triángulo ABC estén alineados.

Solución:

① Si A es uno de estos puntos, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como:

$$\begin{cases} A = (1:0:0) \\ I = (a:b:c) \\ N = (S^2 + S_B S_C : S^2 + S_A S_C : S^2 + S_A S_B) \end{cases}$$

entonces, si estos tres puntos están alineados, debe ocurrir que:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ S^2 + S_B S_C & S^2 + S_A S_C & S^2 + S_A S_B \end{vmatrix} = \underbrace{(-a+b+c)(a+b+c)}_{\neq 0}(b-c)(-a^2+b^2+c^2-bc)$$

es decir:

$$(b-c)(-a^2+b^2+c^2-bc) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = c \\ \text{ó} \\ bc = -a^2+b^2+c^2 \Rightarrow b^2c^2 = (-a^2+b^2+c^2)^2 \end{cases}$$

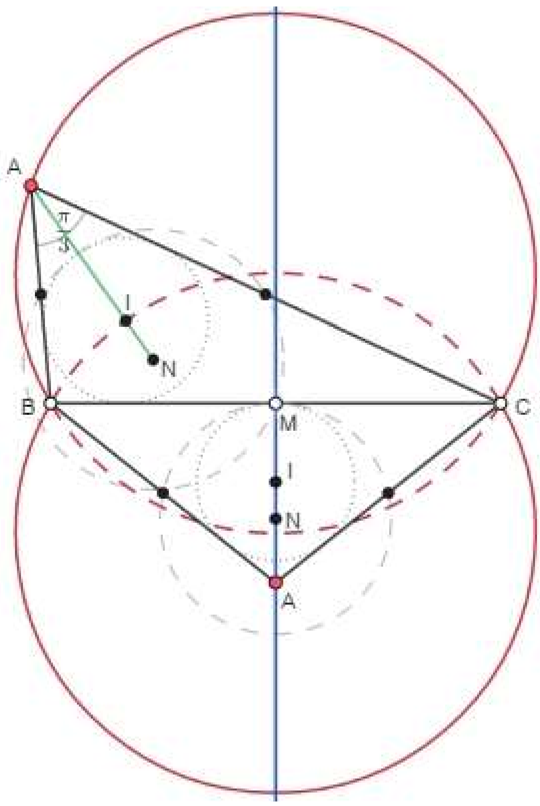
Finalmente, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio M del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento BC, si $A = (x, y)$ $(y \neq 0)$, como:

$$\begin{cases} C = (1,0) \\ B = (-1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = BC = 2 \\ b = AC = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ c = AB = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{cases}$$

entonces:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ \left[x^2 + \left(y + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{4}{3}\right]\left[x^2 + \left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{4}{3}\right] = 0 \end{cases}$$

por lo que el lugar geométrico pedido está formado por la unión de la recta mediatriz del segmento BC y las dos circunferencias que determinan el arco capaz de ángulo $\frac{\pi}{3}$ del segmento BC, exceptuando los puntos que están situados sobre la recta BC, ya que para estos puntos no tendríamos un triángulo.



② Si A es uno de estos puntos, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como:

$$\begin{cases} B=(0:1:0) \\ I=(a:b:c) \\ N=(S^2+S_BS_C : S^2+S_AS_C : S^2+S_AS_B) \end{cases}$$

entonces, si estos tres puntos están alineados, debe ocurrir que:

$$0=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \\ S^2+S_BS_C & S^2+S_AS_C & S^2+S_AS_B \end{vmatrix}=\underbrace{(a-b+c)(a+b+c)}_{\neq 0}(a-c)(a^2-b^2+c^2-ac)$$

es decir:

$$(a-c)(a^2-b^2+c^2-ac)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ \text{ó} \\ ac=a^2-b^2+c^2 \Rightarrow a^2c^2=(a^2-b^2+c^2)^2 \end{cases}$$

TRIÁNGULOS CABRI

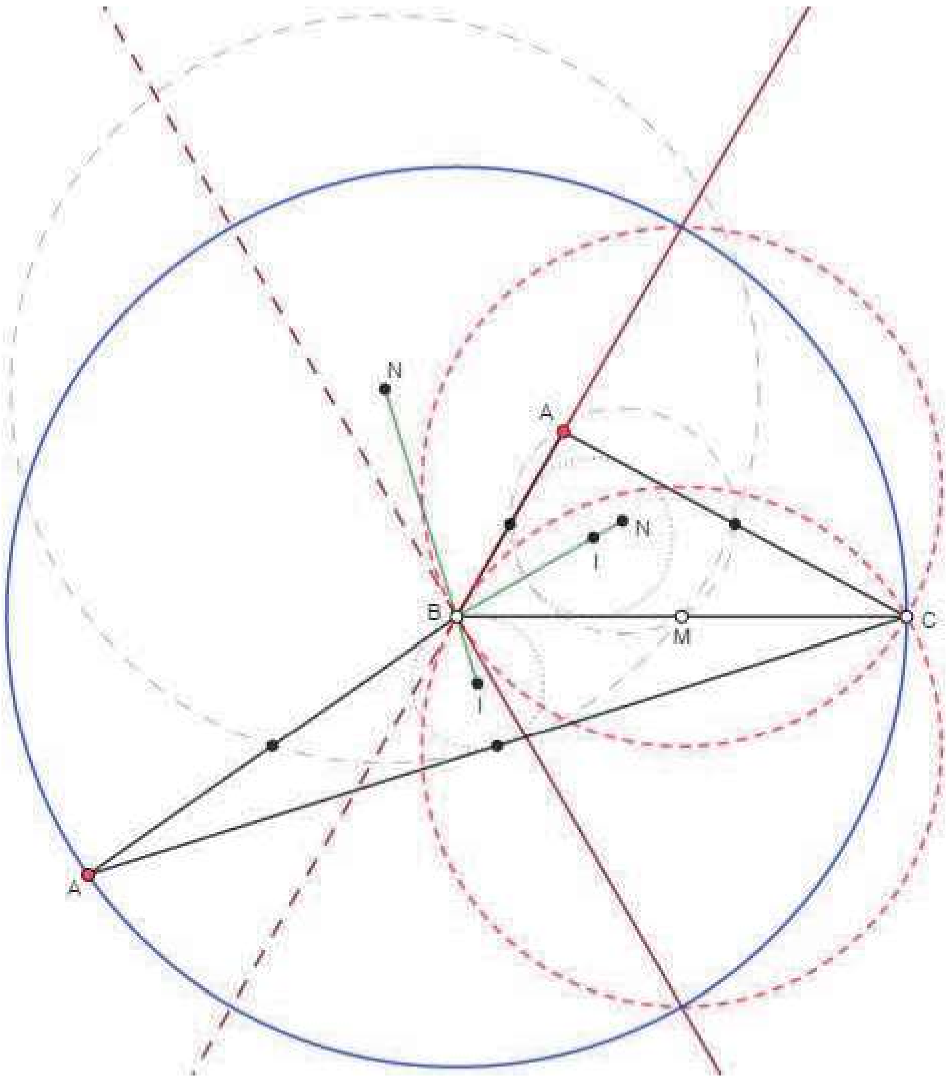
Finalmente, considerando el sistema de referencia cartesiano de ejes rectangulares con origen en el punto medio M del segmento BC y eje de abscisas en la recta BC y tomando como unidad de medida la semilongitud del segmento BC, si $A = (x, y)\ (y \neq 0)$, como:

$$\left\{ \begin{array}{l} C = (1, 0) \\ B = (-1, 0) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = BC = 2 \\ b = AC = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \\ c = AB = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \end{array} \right.$$

entonces:

$$\left\{ \begin{array}{c} (x+1)^2 + y^2 = 4 \\ \text{ó} \\ (\sqrt{3}\,x + y + \sqrt{3}\,)(\sqrt{3}\,x - y + \sqrt{3}\,) = 0 \end{array} \right.$$

por lo que el lugar geométrico pedido está formado por la unión de la circunferencia con centro en el punto B y radio BC y las dos semirrectas tangentes en el punto B (orientadas hacia el arco capaz) al arco capaz de ángulo $\frac{\pi}{3}$ del segmento BC, exceptuando los puntos que están situados sobre la recta BC, ya que para estos puntos no tendríamos un triángulo.



Miguel-Ángel Pérez García-Ortega