

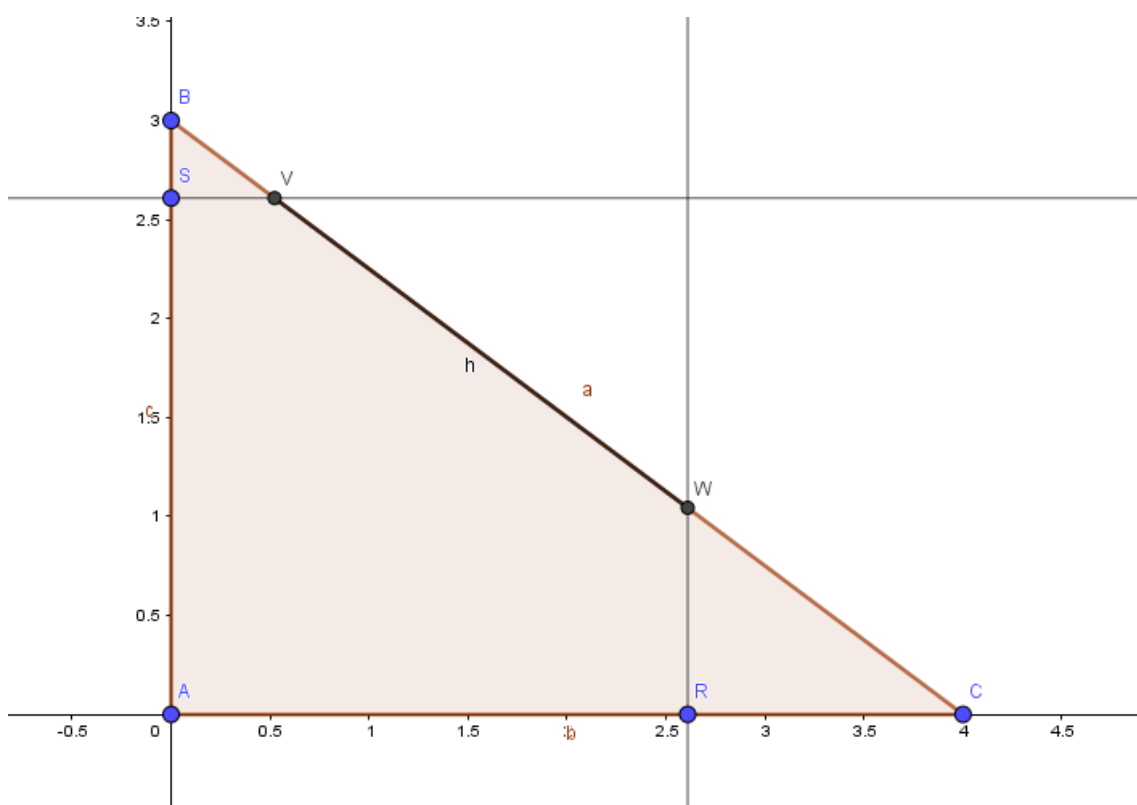
Problema 981

Dado el triángulo rectángulo ABC con $a=5$, $b=4$, $c=3$, hallar m para que el cuadrado de lado m con vértices A, R sobre el lado AC, S sobre el lado AB, corte al lado BC en un segmento $VW=m$.

Barroso R. (2021): Comunicación personal.

Solución propuesta por Antonio Casas Pérez

Podemos suponer que el triángulo dado tiene los vértices B,C en los ejes coordenados y A es el origen.



Los triángulos BSV y BAC son semejantes y lo mismo CWR y CAB. Aplicando el Teorema de Pitágoras y estas semejanzas tendremos la ecuación

$$m^2 = \left(m - \frac{4 \cdot (3 - m)}{3} \right)^2 + \left(m - \frac{3 \cdot (4 - m)}{4} \right)^2$$

Las soluciones son $m=60/47$ y $m=60/23$. La segunda da un cuadrado que no corta la hipotenusa de ABC, así $m=60/23$

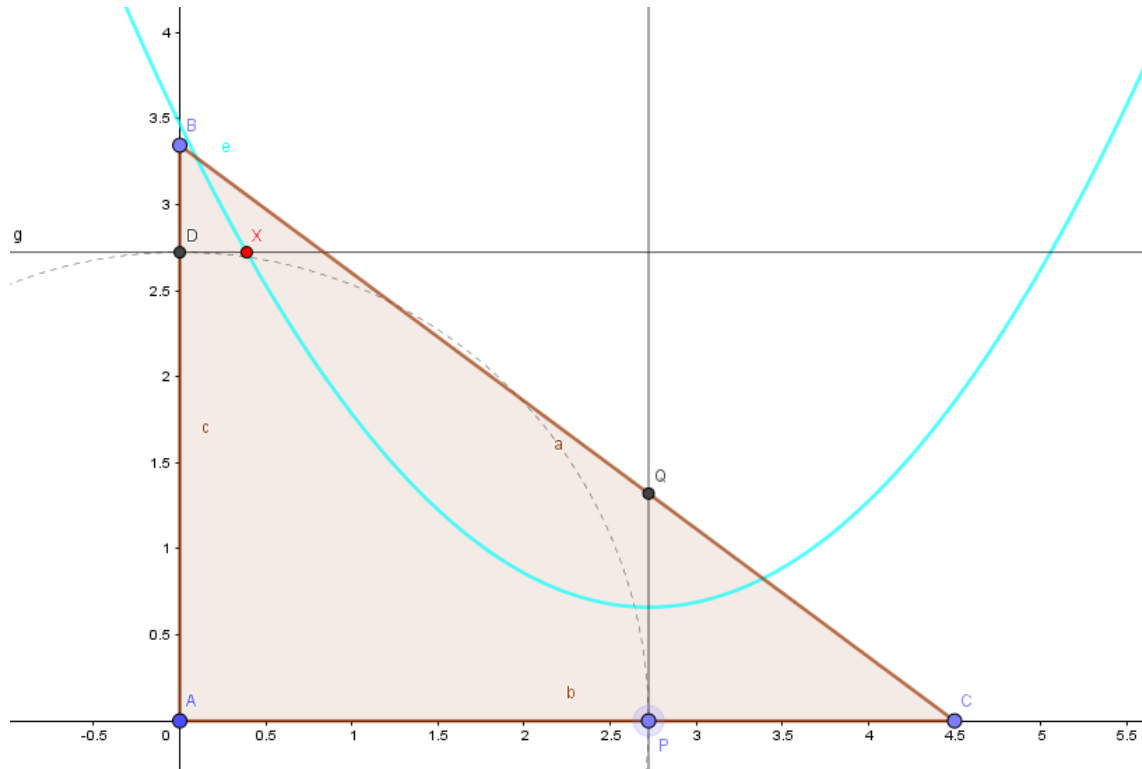
2ª Solución propuesta por Antonio Casas Pérez

Ahora voy a dar otra solución, en este caso no analítica, que generaliza el resultado.

Estudiemos el caso en que el triángulo ABC sea simplemente un triángulo rectángulo de catetos cualesquiera. Podemos suponer, como antes, que está situado con los lados en los ejes OX,OY y el vértice A como origen de coordenadas.

Fijado un punto P sobre el lado AC levantamos por él una perpendicular al eje x y obtenemos el punto Q por intersección con la hipotenusa de ABC.

Sobre el eje y tomamos el punto D tal que $AD = AP$ y una paralela g al eje x por D. Trazamos la parábola de foco Q y directriz el eje x. El punto X es la intersección de tal parábola y la recta g.



El lugar de los puntos X así obtenidos es una cónica. Para trazarla basta repetir la construcción antes indicada, cinco veces. El punto de corte de dicha cónica y la hipotenusa de ABC es uno de los extremos del segmento VW buscado.

