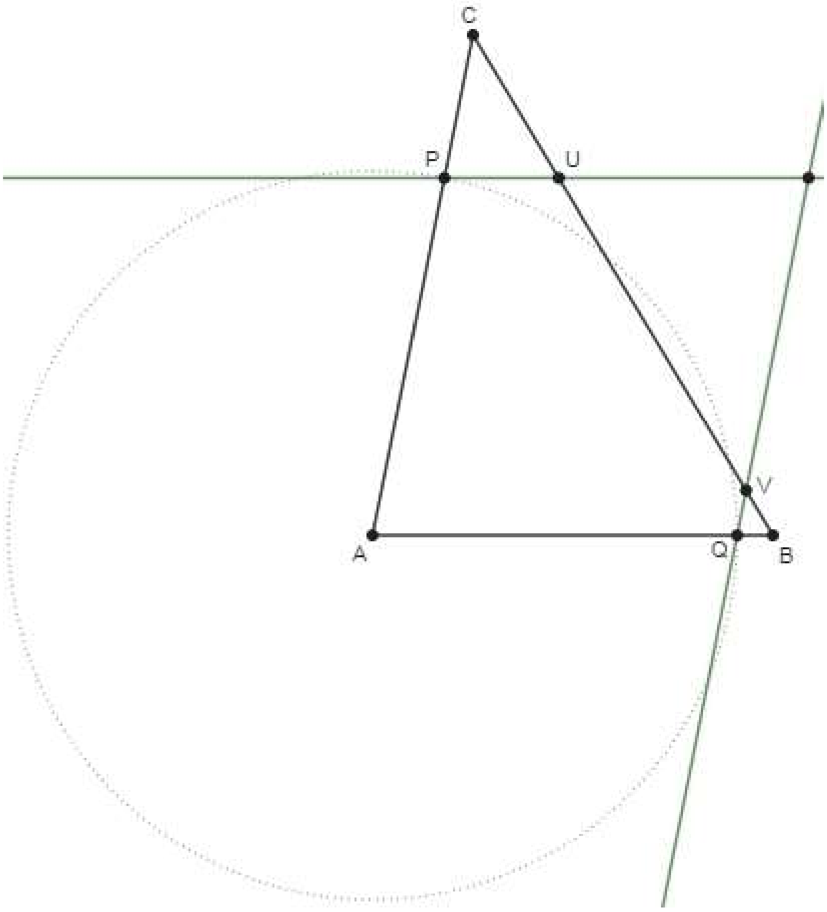
TRIÁNGULOS CABRI

Problema 981. (propuesto por Ricardo Barroso Campos) Dado un triángulo ABC tal que $a > \max\{b, c\}$, hallar $m > 0$ para que el rombo con vértices A, P sobre el lado AC y Q sobre el lado AB corte al lado BC en un segmento UV de longitud m.

Solución:



Coniderando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si:

$$\begin{cases} P = (b-m : 0 : m) \\ Q = (c-m : m : 0) \end{cases} \quad (0 < m < \min\{b, c\})$$

entonces:

$$\begin{cases} PU \equiv 0 = mx + my + (m-b)z \\ QV \equiv 0 = mx + (m-c)y + mz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = PU \cap BC = (0 : b-m : m) \\ V = QV \cap BC = (0 : m : c-m) \end{cases}$$

por lo que:

$$m^2 = UV^2 = \frac{a^2(bc - bm - cm)^2}{b^2c^2} \Rightarrow m = \frac{abc}{ab + ac \pm bc}$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

Además, como:

$$U = V \Leftrightarrow \frac{b-m}{m} = \frac{m}{c-m} \Leftrightarrow m = \frac{bc}{b+c}$$

y:

$$0 < \frac{abc}{ab+ac+bc} < \frac{bc}{b+c} < \frac{abc}{ab+ac-bc} \underset{a>\max\{b,c\}}{<} \min\{b,c\}$$

entonces, el valor buscado es:

$$m = \frac{abc}{ab+ac-bc}$$

Finalmente, para el caso particular en que:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 5 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{array} \right. \Rightarrow m = \frac{60}{23}$$