Problema 982. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega)

① Dado un triángulo ABC con incentro I, se consideran los puntos medios D, E y F de los segmentos BC, CA y AB, respectivamente. Probar que la cónica que pasa por los puntos A, D, E, F e I es de tipo hiperbólico. Además, si $AB = AC$, se trata de un par de rectas perpendiculares, formado por la rectas EF y AD y, en caso contrario, se trata de una hipérbola no equilátera.

② Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que describe el punto A cuando la cónica de tipo hiperbólico que pasa por los puntos A, D, E, F e I correspondientes al triángulo ABC pasa por su circuncentro O.

③ Dado un segmento BC, determinar el lugar geométrico que describe el punto A cuando la cónica de tipo hiperbólico que pasa por los puntos A, D, E, F e I correspondientes al triángulo ABC pasa por su punto de Feuerbach F_e.

Solución:

① Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, como $I = (a : b : c)$ y:

$$\begin{cases} D = (0 : 1 : 1) \\ E = (1 : 0 : 1) \\ F = (1 : 1 : 0) \end{cases}$$

al ser la ecuación de una cónica general que pase por el punto A de la forma:

$$my^2 + nz^2 + uxy + vxz + wyz = 0 \ (m, n, u, v, w \in \mathbb{R})$$

imponiendo que pase por los puntos D, E, F e I, resulta que la ecuación de nuestra cónica es:

$$-c(a+b-c)y^2 + b(a-b+c)z^2 + c(a+b-c)xy - b(a-b+c)xz + (b-c)(-a+b+c)yz = 0$$

cuyo discriminante es:

$$\Delta = 4bc(a-b+c)(a+b-c) > 0$$

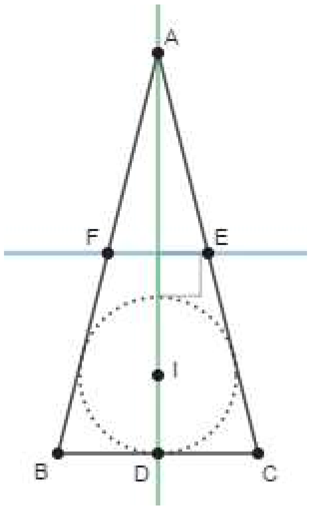
por lo que es de tipo hiperbólico (por tener dos puntos en la recta del infinito). Además, como:

$$\begin{vmatrix} 0 & c(a+b-c) & -b(a-b+c) \\ c(a+b-c) & -c(a+b-c) & (b-c)(-a+b+c) \\ -b(a-b+c) & (b-c)(-a+b+c) & b(a-b+c) \end{vmatrix} = 4bc(b-c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

entonces, vamos a distinguir dos casos:

❶ Si $AC = b = c = AB$, se trata de una cónica degenerada, por lo que será el par de rectas perpendiculares formado por las recta AD y EF, cuya ecuación es:

$$(x-y-z)(y-z) = 0$$



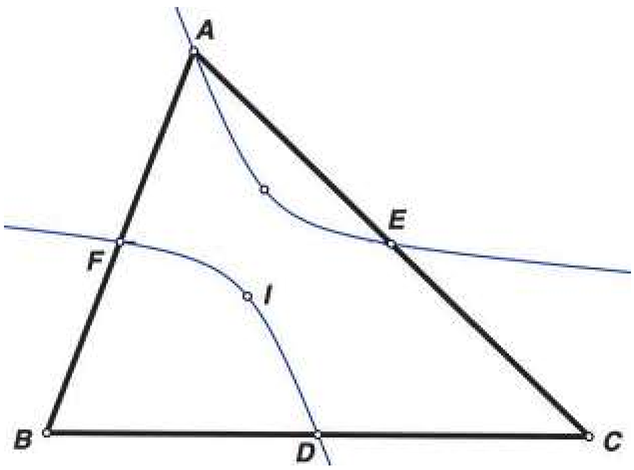
❶ Si $AC = b \neq c = AB$, se trata de una hipérbola, ya que sus puntos del infinito son:

$$\begin{cases} I_1 = \left(\sqrt{\dfrac{c(a+b-c)}{b(a-b+c)}} - 1 : 1 : -\sqrt{\dfrac{c(a+b-c)}{b(a-b+c)}} \right) \\ I_2 = \left(\sqrt{\dfrac{c(a+b-c)}{b(a-b+c)}} + 1 : -1 : -\sqrt{\dfrac{c(a+b-c)}{b(a-b+c)}} \right) \end{cases}$$

Además, como:

$$I_1 \cdot I_2 = \frac{c(b-c)(a+b+c)}{(a-b+c)} \neq 0$$

entonces, esta hipérbola es no equilátera.



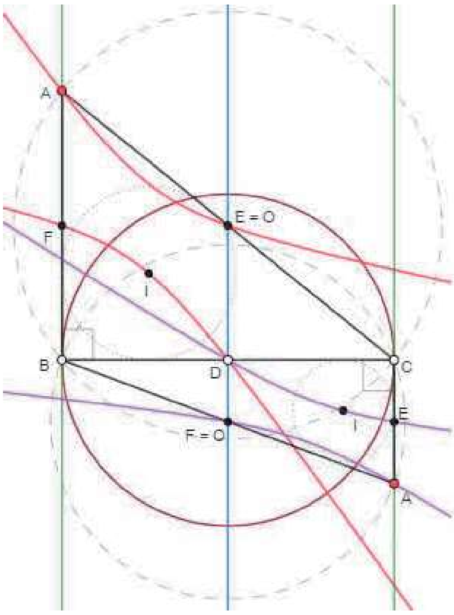
② Si A es uno de estos puntos, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo $ABC,$ según el primer apartado, la ecuación de la cónica de tipo hiperbólico que pasa por los puntos A, D, E, F e I es:

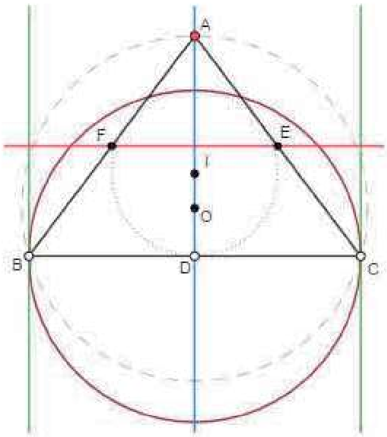
$$-c(a+b-c)y^2 + b(a-b+c)z^2 + c(a+b-c)xy - b(a-b+c)xz + (b-c)(-a+b+c)yz = 0$$

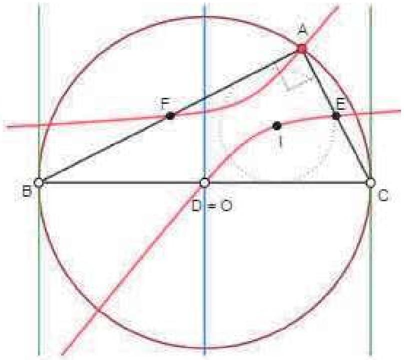
por lo que, imponiendo que pase por el punto $O = (a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$, resulta que:

$$bc(b-c)(a+b+c)S_AS_BS_C = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = c \\ \text{ó} \\ S_A = 0 \\ \text{ó} \\ S_B = 0 \\ \text{ó} \\ S_C = 0 \end{cases}$$

lo cual significa que el punto A debe estar situado sobre la recta mediatriz del segmento BC (en cuyo caso la cónica sería un par de rectas perpendiculares), sobre las rectas perpendiculares a BC pasando por B o C o sobre la circunferencia con diámetro BC (en cuyos casos la cónica sería una hipérbola no equilátera), exceptuando sus respectivos puntos de intersección con la recta BC, ya que para estos puntos no tendríamos un triángulo.







③ Si A es uno de estos puntos, considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, según el primer apartado, la ecuación de la cónica de tipo hiperbólico que pasa por los puntos A, D, E, F e I es:

$$-c(a+b-c)y^2 + b(a-b+c)z^2 + c(a+b-c)xy - b(a-b+c)xz + (b-c)(-a+b+c)yz = 0$$

por lo que, imponiendo que pase por el punto:

$$F_e = X_{11} = ((b-c)^2(-a+b+c) : (a-c)^2(a-b+c) : (a-b)^2(a+b+-c))$$

resulta que:

$$bc(a-b+c)(a+b-c)(a-b)(a-c)(b-c)(2a-b-c)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ \text{ó} \\ a=c \\ \text{ó} \\ b=c \\ \text{ó} \\ b+c=2a \end{cases}$$

lo cual significa que el punto A debe estar situado sobre la recta mediatriz del segmento BC (en cuyo caso la cónica sería un par de rectas perpendiculares), sobre las circunferencias centradas en los puntos B o C y radio BC o sobre la elipse con focos en los puntos B y C y suma de distancias igual a $2BC$ (en cuyos casos la cónica sería una hipérbola no equilátera), exceptuando sus respectivos puntos de intersección con la recta BC, ya que para estos puntos no tendríamos un triángulo.