

Quincena del 1 al 31 de Marzo de 2021.

Propuesto Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz).

Problema 982.- 1) Dado un triángulo ABC con incentro I , se consideran los puntos medios D, E y F de los segmentos BC, CA y AB , respectivamente. Probar que la cónica que pasa por los puntos A, D, E, F y I es una hipérbola. Además, si $AB = AC$, se trata de un par de rectas perpendiculares, formado por la rectas EF y AD y, en caso contrario, se trata de una hipérbola no equilátera.

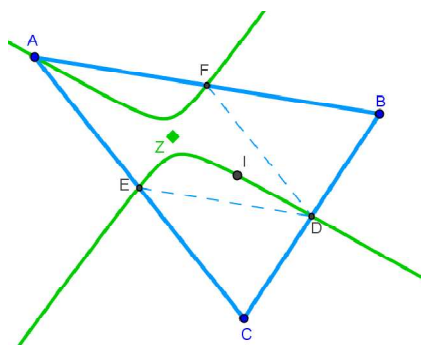
2) Dado un segmento BC , determinar el lugar geométrico que describe el punto A cuando la hipérbola que pasa por los puntos A, D, E, F e I correspondientes al triángulo ABC pasa por su circuncentro O .

3) Dado un segmento BC , determinar el lugar geométrico que describe el punto A cuando la hipérbola que pasa por los puntos A, D, E, F e I correspondientes al triángulo ABC pasa por su punto de Feuerbach F_e .

M. A. (2021): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

1) El cuadrilátero $AEDF$ es un paralelogramo, por tanto, cualquier cónica que lo circunscriba (salvo si es degenerada) tiene por centro el punto de corte de sus diagonales: el punto medio de la mediana AD . Si el incentro no está alineado con ningún par de puntos de este cuadrilátero tendremos siempre una hipérbola o una elipse. Pero hay ocasiones donde esto no sucede así, por ejemplo si el triángulo ABC es isósceles ($b = c$, e incluso equilátero). El incentro en este caso está sobre la mediana (mediana, bisectriz, mediatriz... etc) de A y la cónica degenerada resultante sería la hipérbola equilátera formada por la altura desde A y la paralela media. También está sobre la mediana el circuncentro del triángulo.



Para ver que la cónica es una hipérbola tendremos que encontrar sus puntos del infinito.

Tomando coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC los puntos medios de los lados son los de coordenadas $D(0:1:1)$; $E(1:0:1)$ y $F(1:1:0)$. Buscamos el haz de cónicas que circunscriba al paralelogramo $ADEF$:

$$\alpha \cdot ED \cdot AF + \beta \cdot AE \cdot DF = 0$$

Con las ecuaciones de las rectas $AE: y = 0$; $AF: z = 0$;

$DF: x + z = y$, $ED: x + y = z$ se tiene el haz

$$\alpha(x + y - z)z + \beta y(x - y + z) = 0 \text{ que ha de pasar por el incentro } I(a:b:c).$$

Imponiendo esta condición obtenemos $\alpha = -b(a - b + c)$ y $\beta = c(a + b - c)$.

Con ello la ecuación de la cónica es

$$-b(a - b + c)(x + y - z)z + c(a + b - c)(x - y + z)y = 0.$$

También puede escribirse como

$$-b(s - b)(x + y - z)z + c(s - c)(x - y + z)y = 0$$

Los puntos del infinito se obtienen haciendo $z = -x - y$, sustituyendo resulta la ecuación

$$b(a - b + c)x^2 + 2b(a - b + c)xy - (-a + b + c)(b - c)y^2 = 0$$

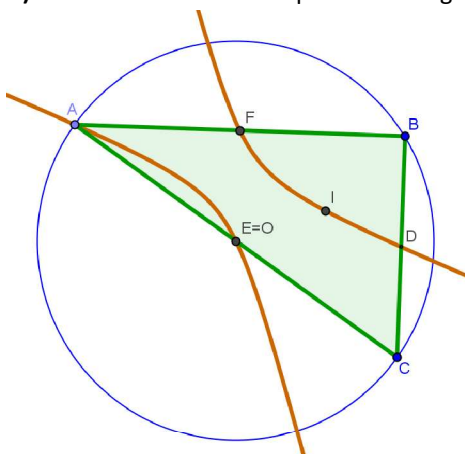
cuyo discriminante es

$$b^2(a - b + c)^2 + b(a - b + c)(-a + b + c)(b - c) = bc(a + b - c)(a - b + c)$$

que siempre es positivo en un triángulo.

Con esto hemos concluido la primera parte.

2) Ya hemos dicho antes que si el triángulo es isósceles ($b = c$), el incentro y el circuncentro están alineados con A y D , se obtendría una hipérbola degenerada.



Esta hipérbola también pasa por el circuncentro si el triángulo es rectángulo en cualquiera de sus vértices, pues entonces, ese punto se confunde con el punto medio del lado sobre el que está. La hipérbola no sería degenerada, ya que el incentro no habría de estar alineado como antes.

Para saber si hay algún otro caso, debemos proceder, utilizando la ecuación de la cónica, a sustituir las variables x, y, z por las coordenadas del circuncentro, $a^2 S_A, b^2 S_B, c^2 S_C$ respectivamente.

Así pues se tendrá

$$-b(a-b+c)(a^2 S_A + b^2 S_B - c^2 S_C)c^2 S_C + c(a+b-c)(a^2 S_A - b^2 S_B + c^2 S_C)b^2 S_B = 0,$$

donde $S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}$ y expresiones similares para las otras "eses".

Efectuados los cálculos esa expresión es equivalente a

$$bc(a+b+c)(a^2-b^2+c^2)(b-c)(-a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2) = 0$$

Para que esa expresión sea nulo, en un triángulo ABC , deberá darse alguna de estas situaciones:

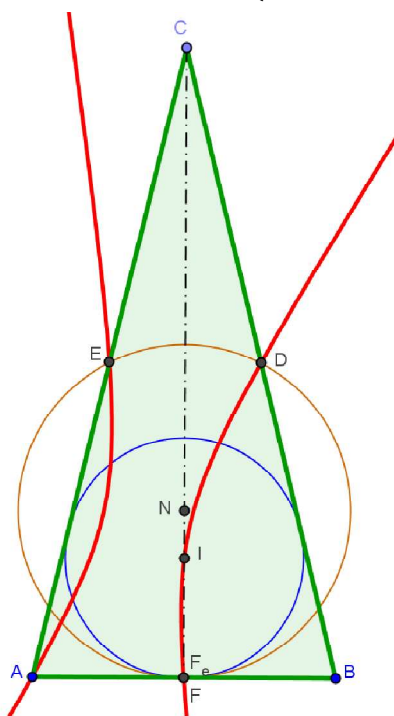
-Que sea $b = c$, isósceles, ya visto, es una cónica degenerada.

-Que sea rectángulo. También comentado. Y no hay más.

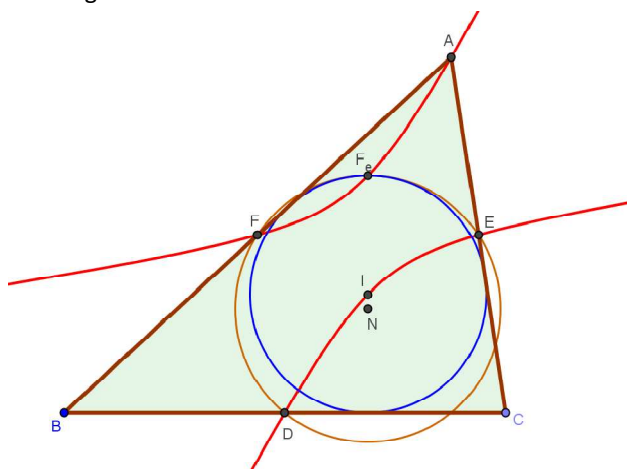
Por tanto si es isósceles el lugar geométrico de A es la mediatriz de BC .

Si no lo es y el triángulo es rectángulo en A , el lugar geométrico es la circunferencia de diámetro BC .

3) El punto de Feuerbach es el de tangencia de la circunferencia inscrita y la de Euler; es el número 11 de la ETC y tiene coordenadas $((s-a)(b-c)^2 : \dots : \dots)$.



Si el triángulo es isósceles, la circunferencia inscrita es tangente en el punto medio, y tanto el incentro como el centro de la circunferencia de Euler están alineados con él; por consiguiente ese es el punto de Feuerbach. Ya hemos visto que si es $b = c$, la hipérbola degenera por estar alineados además con A , pero si los lados iguales son otros dos cualesquiera, por ejemplo $a = b$, no ocurre tal, como se puede ver en la figura.



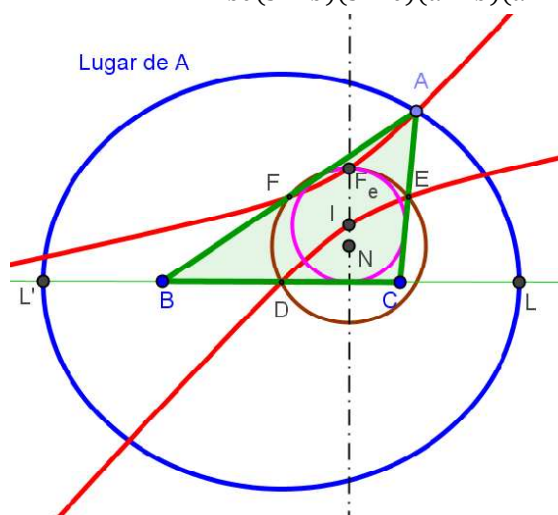
No sabemos si hay otras situaciones en las que la cónica circunscrita a los puntos medios, A y el incentro pase por el punto $F_e = X_{11}$, para ver si existen obligamos a que este punto verifique su ecuación.

Imponiendo a nuestra cónica que también contenga a este punto se tiene

$$\begin{aligned}
 & -b(s-b)(x+y-z)z + c(s-c)(x-y+z)y = 0 \\
 & -b(s-b)[(s-a)(b-c)^2 + (s-b)(c-a)^2 - (s-c)(a-b)^2](s-c)(a-b)^2 \\
 & + c(s-c)[(s-a)(b-c)^2 - (s-b)(c-a)^2 + (s-c)(b-a)^2](s-b)(b-a)^2 = 0
 \end{aligned}$$

De donde resulta finalmente

$$bc(s-b)(s-c)(a-b)(a-c)(c-b)(2a-b-c) = 0.$$



Eso sólo puede ser cero si el triángulo es isósceles en sus tres casos posibles (en la figura $a = b$) **o que a sea la semisuma de b y c** como mostramos en la última figura, lo cual no era evidente en principio.

En este caso, fijado $a = BC$, el lugar geométrico del vértice A es una elipse con focos en los extremos B y C y eje real el doble de este segmento. Los puntos N, I y F_e obviamente están alineados y la recta que los contiene es perpendicular a BC o bien, la tangente en el punto de Feuerbach es paralela al lado BC ¹.

Y con esto concluimos. ■

¹ A partir de las ecuaciones de las circunferencias inscrita y de Euler, se calcula su eje radical, que es $\frac{x}{b-c} + \frac{y}{c-a} + \frac{z}{a-b} = 0$.

Es perpendicular a ambas circunferencias en el punto común F_e . (*Geometría en baricéntricas*. A. Montesdeoca, p. 126)

Ese cálculo resulta a partir de $2(s-a)^2 - S_A = (a-b)(a-c)$.

Cuando $2a = b + c$ esa recta adopta la expresión $x = 2(y+z)$ y esta ES PARALELA al lado $a = BC$ como se puede comprobar fácilmente.