Pr. Cabri 983

Enunciado

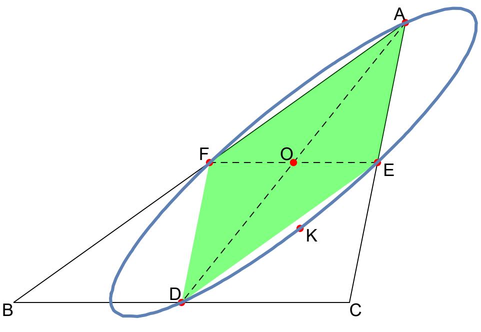
Dado un triángulo ABC con punto simediano K, se consideran los puntos medios D, E y F de los segmentos BC, CA y AB, respectivamente, y la cónica que pasa por los puntos A, D, E, F y K.
Describir el centro de dicha cónica y razonar las siguientes cuestiones:
1) ¿ En qué casos será una elipse ? ¿ Puede ser en algún caso una circunferencia ?.
2) ¿ En qué casos será de tipo parabólico ?. Cuando así sea, indicar cuando será degenerada o no degenerada y describir el par de rectas correspondiente cuando sea degenerada.
3) ¿ En qué casos será de tipo hiperbólico ?. Cuando así sea, indicar cuando será degenerada o no degenerada y describir el par de rectas correspondiente cuando sea degenerada. ¿ Puede ser en algúncaso una hipérbola equilátera ?.

Propuesto por Miguel Ángel Pérez García-Ortega.

Solución

de César Beade Franco

Consideremos el triángulo A(a,b), B(-1,0) y C(1,0). Los otros puntos son D(0,0), E($\frac{a+1}{2}$, $\frac{b}{2}$), F($\frac{a-1}{2}$, $\frac{b}{2}$) y K($\frac{4a}{3+a^2+b^2}$, $\frac{2b}{3+a^2+b^2}$).
Los 4 puntos A, D, E y F forman un rombo, lo que excluye parábolas salvo casos degenerados (par de rectas paralelas). Además el centro de la cónica es el punto de corte de sus diagonales AD y EF, es decir su punto medio ($\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$).



La ecuación de la cónica es

$$b^4 x(1+ax) - 2(-1+a^2)^2 b x y - 2b^3(a+x+a^2x) y + a(-1+a^2)^2 y^2 + b^2((-1+a^2)x(-1+ax) + a(3+a^2)y^2) = 0,$$

con matriz asociada

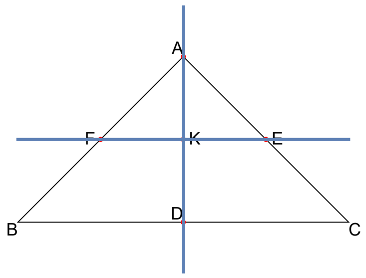
$$Mz=\begin{pmatrix} a b^2(-1+a^2+b^2) & -(-1+a^2)^2 b-(1+a^2)b^3 & \frac{1}{2}b^2(1-a^2+b^2) \\ -(-1+a^2)^2 b-(1+a^2)b^3 & a+a^5+3ab^2+a^3(-2+b^2) & -ab^3 \\ \frac{1}{2}b^2(1-a^2+b^2) & -ab^3 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante vale

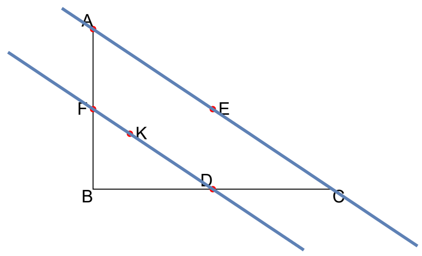
$$-\frac{1}{4}(-1+a)\,a\,(1+a)\,b^4(-1+a^2+b^2)(1-2a+a^2+b^2)(1+2a+a^2+b^2).$$

Se anula si b=0 (triángulo ABC degenerado), a=-1, 0, 1 y a^2+b^2=1, situaciones que analizaremos posteriormente.

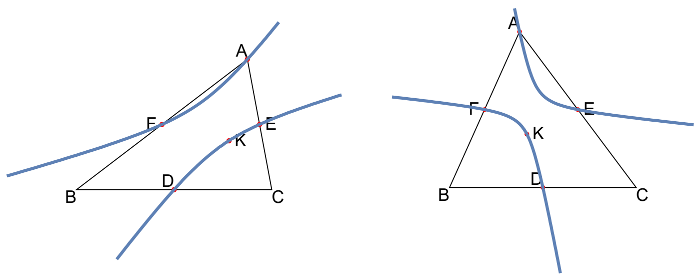
1) Su invariante afín es $(-1+a)\ (1+a)\ b^2\ (1-2\,a+a^2+b^2)\ (1+2\,a+a^2+b^2)$.
Salvo casos degenerados no se anula y su signo es negativo si -1<a<1. Así que la cónica es una elipse si a∈(-∞,-1)∪(1,∞), como vemos en el dibujo anterior.
La cónica sería una circunferencia si ADEF fuera un cuadrado (a=0 y b=1) pero en este caso la cónica es degenerada.



2) Nunca es una parábola. Si a=±1, la cónica degenera en un par de rectas paralelas.



3) La curva es una hipérbola si -1<a<1.



Degenera en un par de rectas que se cortan si $a^2+b^2=1$, es decir, A situado en una circunferencia de centro D y radio BC.
En este caso K está alineado con E y F.
Nunca es una hipérbola equilátera salvo casos degenerados (a=0, par de rectas perpendiculares). Aquí la alineación de K se da con A y D.