

TRIÁNGULOS CABRI

Ejercicio 983. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC con punto simediano K , se consideran los puntos medios D , E y F de los segmentos BC , CA y AB , respectivamente, y la cónica que pasa por los puntos A , D , E , F y K . Describir el centro de dicha cónica y razonar las siguientes cuestiones:

- ① ¿ En qué casos será una elipse ?. ¿ Puede ser en algún caso una circunferencia ?.
- ② ¿ En qué casos será de tipo parabólico ?. Cuando así sea, indicar cuando será degenerada o no degenerada y describir el par de rectas correspondiente cuando sea degenerada.
- ③ ¿ En qué casos será de tipo hiperbólico ?. Cuando así sea, indicar cuando será degenerada o no degenerada y describir el par de rectas correspondiente cuando sea degenerada. ¿ Puede ser en algún caso una hipérbola equilátera ?.

Solución:

Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , como $K = (a^2 : b^2 : c^2)$ y:

$$\begin{cases} D = (0 : 1 : 1) \\ E = (1 : 0 : 1) \\ F = (1 : 1 : 0) \end{cases}$$

al ser la ecuación de una cónica general que pase por el punto A de la forma:

$$my^2 + nz^2 + uxy + vxz + wyz = 0 \quad (m, n, u, v, w \in \mathbb{R})$$

imponiendo que pase por los puntos D , E , F y K , resulta que la ecuación de nuestra cónica es:

$$-c^2 S_C y^2 + b^2 S_B z^2 + c^2 S_C xy - b^2 S_B xz + (b^2 - c^2) S_A yz = 0$$

cuyo centro (conjugado de la recta del infinito) es el punto medio $Q = (2 : 1 : 1)$ del segmento AD (cuando la cónica no es de tipo parabólico) y cuyo discriminante es:

$$\Delta = 16b^2 c^2 S_B S_C$$

siendo el determinante de su matriz asociada:

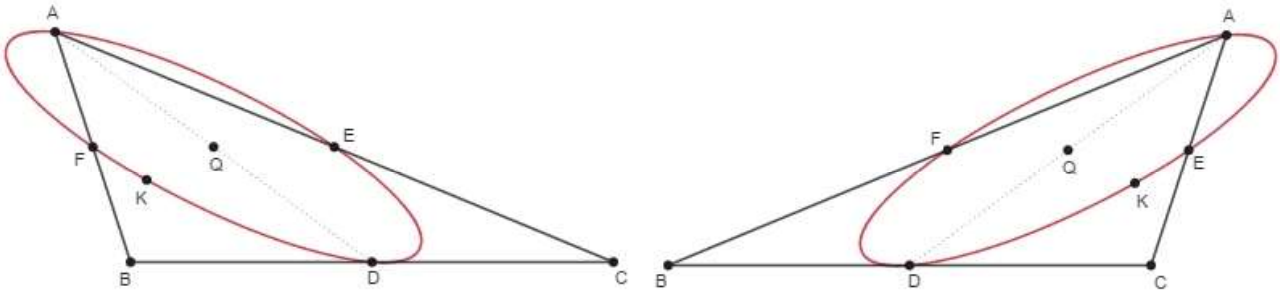
$$\theta = \begin{vmatrix} 0 & c^2 S_C & -b^2 S_B \\ c^2 S_C & -2c^2 S_C & (b^2 - c^2) S_A \\ -b^2 S_B & (b^2 - c^2) S_A & 2b^2 S_B \end{vmatrix} = 8b^2(b+c)(b-c)S_A S_B S_C$$

- ① Esta cónica será una elipse cuando su discriminante sea negativo (por no tener ningún punto situado en la recta del infinito), es decir, cuando $S_B S_C < 0$, lo cual significa que uno de los ángulos correspondientes a los vértices B o C ha de ser obtuso. Además, en este caso, si una de estas elipse fuese una circunferencia, habría de ser la circunferencia de Euler del triángulo ABC , por lo que el punto A (y el punto K) estaría situado sobre ésta, cuya ecuación es:

$$S_A x^2 + S_B y^2 + S_C z^2 - c^2 xy - b^2 xz + a^2 yz = 0$$

TRIÁNGULOS CABRI

lo cual implicaría que $S_A = 0$, es decir, que el triángulo ABC sería rectángulo en A , siendo esto imposible, ya que un triángulo no puede tener un ángulo obtuso y otro recto.



- ② Esta cónica será de tipo parabólico cuando su discriminante sea nulo (por tener un único punto situado en la recta del infinito), es decir, cuando $S_B S_C = 0$, lo cual significa que uno de los ángulos correspondientes a los vértices B o C ha de ser recto. Además, en este caso, como $\theta = 0$, entonces, la cónica correspondiente será degenerada, por lo que ha de ser un par de rectas paralelas, pudiéndose distinguir dos casos:

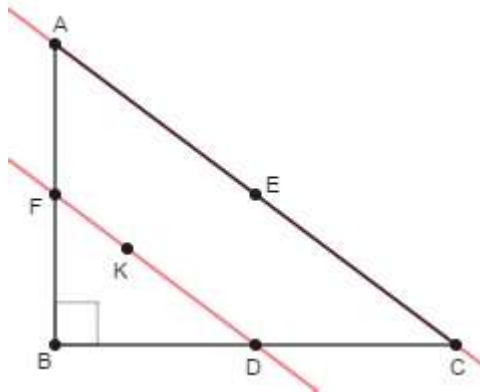
☺ Si el triángulo ABC es rectángulo en B , entonces:

$$0 = S_B = a^2 - b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2$$

en cuyo caso, la ecuación de la cónica es:

$$y(x - y + z) = 0$$

que corresponde al par de rectas paralelas formado por las rectas AC y DF , estando el punto $K = (a^2 : a^2 + c^2 : c^2)$ situado sobre la recta DF y siendo su centro el punto $AC_\infty = (1 : 0 : -1)$.



☹ Si el triángulo ABC es rectángulo en C , entonces:

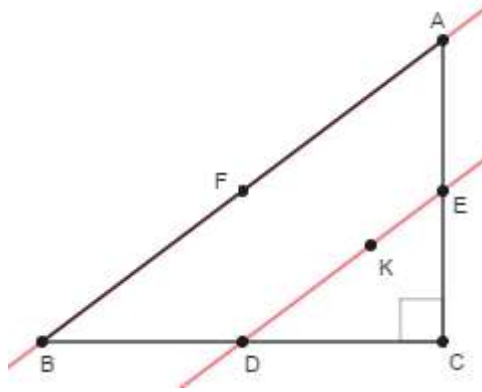
$$0 = S_C = a^2 + b^2 - c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

TRIÁNGULOS CABRI

en cuyo caso, la ecuación de la cónica es:

$$z(x + y - z) = 0$$

que corresponde al par de rectas paralelas formado por las rectas AB y DE , estando el punto $K = (a^2 : b^2 : a^2 + b^2)$ situado sobre la recta DE y siendo su centro el punto $AB_{\infty} = (1 : -1 : 0)$.



- ③ Esta cónica será de tipo hiperbólico cuando su discriminante sea positivo (por tener dos puntos situados en la recta del infinito), es decir, cuando $S_B S_C > 0$, lo cual significa que los dos ángulos correspondientes a los vértices B y C han de ser agudos. Además, en este caso:

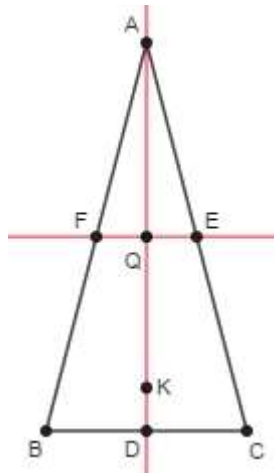
$$\theta = 0 \Leftrightarrow (b - c)S_A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ \text{ó} \\ S_A = 0 \end{cases}$$

lo cual significa que las cónicas de tipo hiperbólico serán degeneradas en los siguientes casos:

- ☺ Cuando el triángulo ABC sea isósceles, con $AB = AC$, en cuyo caso, la ecuación de la cónica es:

$$(y - z)(x - y - z) = 0$$

que corresponde al par de rectas perpendiculares formado por las rectas AD y EF y estando el punto $K = (a^2 : b^2 : b^2)$ situado sobre la recta AD .

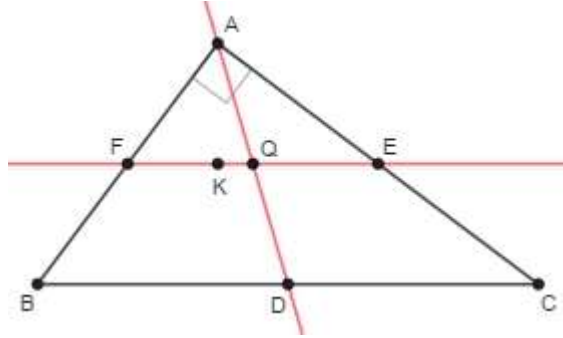


TRIÁNGULOS CABRI

- ☺ Cuando el triángulo ABC sea rectángulo en A , en cuyo caso, $a^2 = b^2 + c^2$ por lo que la ecuación de la cónica es:

$$(y-z)(x-y-z) = 0$$

que corresponde al par de rectas secantes formado por las rectas AD y EF y estando el punto $K = (b^2 + c^2 : b^2 : c^2)$ situado sobre la recta EF .



(por tanto, si el triángulo ABC fuese rectángulo en A e isósceles, sería $K = AD \cap EF = Q$)

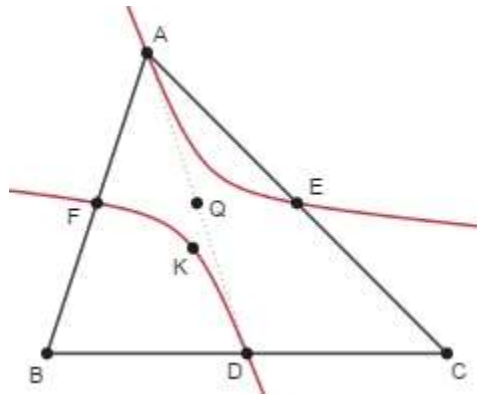
Finalmente, en este caso, si la cónica fuese no degenerada, sería una hipérbola, cuyos puntos del infinito:

$$\begin{cases} I_1 = \left(\frac{c}{b} \sqrt{\frac{S_C}{S_B}} - 1 : 1 : -\frac{c}{b} \sqrt{\frac{S_C}{S_B}} \right) \\ I_2 = \left(\frac{c}{b} \sqrt{\frac{S_C}{S_B}} + 1 : -1 : -\frac{c}{b} \sqrt{\frac{S_C}{S_B}} \right) \end{cases}$$

verifican que:

$$I_1 \cdot I_2 = \frac{c^2(b^2 - c^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{2S_B} \underset{\theta \neq 0 \Rightarrow b \neq c}{\neq} 0$$

y, por tanto, esta hipérbola sería no equilátera.



TRIÁNGULOS CABRI

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega