

Quincena del 1 al 31 de Marzo de 2021.

Propuesto Miguel-Ángel Pérez García-Ortega, profesor de Matemáticas en el IES "Bartolomé-José Gallardo" de Campanario (Badajoz).

Problema 983.- Dado un triángulo ABC con punto simediano K , se consideran los puntos medios D, E y F de los segmentos BC, CA y AB , respectivamente, y la cónica que pasa por los puntos A, D, E, F y K .

Describir el centro de dicha cónica y razonar las siguientes cuestiones:

1) ¿En qué casos será una elipse? ¿Puede ser en algún caso una circunferencia?

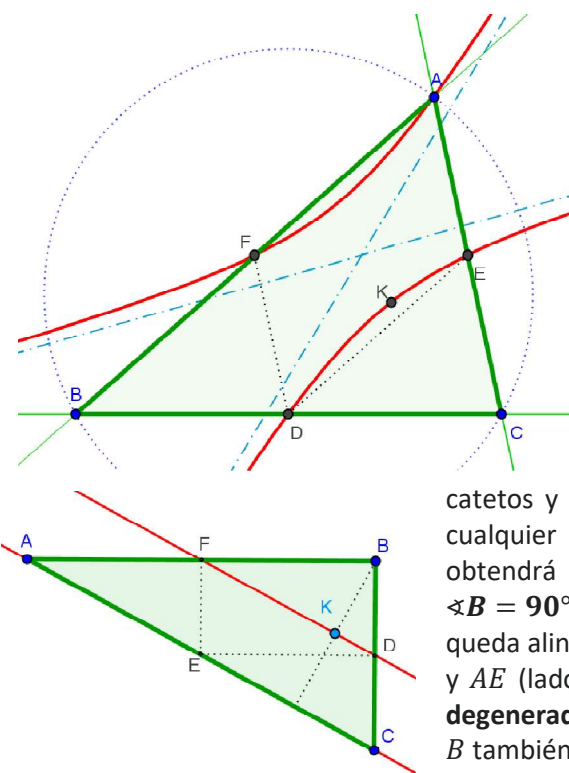
2) ¿En qué casos será una parábola? Cuando así sea, indicar cuando será degenerada o no degenerada y describir el par de rectas correspondiente cuando sea degenerada.

3) ¿En qué casos será una hipérbola? Cuando así sea, indicar cuando será degenerada o no degenerada y describir el par de rectas correspondiente cuando sea degenerada.

¿Puede ser en algún caso una hipérbola equilátera?

M. A. (2021): Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



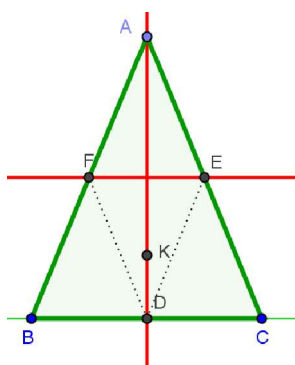
El cuadrilátero $AEDF$ es un paralelogramo, por tanto, cualquier cónica que lo circunscriba (salvo si es degenerada) tiene por centro el punto de corte de sus diagonales: el punto medio de la mediana AD . Si el simediano no está alineado con ningún par de puntos de este cuadrilátero tendremos siempre una hipérbola o una elipse. Pero hay ocasiones donde esto no sucede así. Por ejemplo, **si el ángulo A es recto**, sabemos que la simediana⁽¹⁾ es el punto medio de la altura sobre la hipotenusa y alineado con los puntos medios E y F de los catetos y **la cónica resultante es un par de rectas**. En cualquier caso que el triángulo sea rectángulo se obtendrá una cónica degenerada. Por ejemplo **si $\angle B = 90^\circ$** , (y también vale $\angle C = 90^\circ$) el simediano queda alineado con D y F : la cónica es el par de rectas DF y AE (lado AB), ambas paralelas. Se tiene una **parábola degenerada**. Si se cambiaran los papeles de A y B también tendríamos una cónica degenerada. En ese caso la hipérbola definida por el par de rectas FD y BE .

Y por no dejar los triángulos rectángulos veamos que **nunca se puede obtener una circunferencia**, pues, si tal existiera, al pasar por los puntos medios de los lados habría de ser

⁽¹⁾ La simediana de A pasa por el punto de intersección de las tangentes en B y C , que son perpendiculares a la hipotenusa. Por eso la simediana del ángulo recto es la altura desde él.

Por otra parte el punto simediano está situado en la intersección de las rectas que unen el punto medio de un lado con punto medio de la altura sobre el mismo y por tanto, alineado con los puntos medios de los catetos.

la de los nueve puntos. Sólo podría pasar por el vértice A si el ángulo ahí fuera recto, pero en ese caso tendríamos una cónica degenerada y no una circunferencia.



También resulta una cónica degenerada si el triángulo ABC es **isósceles** ($b = c$, e incluso equilátero). El punto simediano en este caso está sobre la mediana (mediana, bisectriz... etc) de A y la **cónica degenerada** resultante sería la **hipérbola equilátera** formada por la altura desde A y la paralela media.

Pero veamos todo esto con más detalle usando las coordenadas baricéntricas relativas al triángulo ABC .

Según el problema 982 tenemos el haz de cónicas que circunscriben al cuadrilátero $ADEF$ es:

$$\alpha(x + y - z)z + \beta y(x - y + z) = 0$$

Para que pase por el simediano $K(a^2 : b^2 : c^2)$ se ha de verificar $-\frac{\beta}{\alpha} = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)c^2}{(a^2 - b^2 + c^2)b^2} = \frac{c \cdot \cos C}{b \cdot \cos B}$

Y la ecuación de la cónica sería:

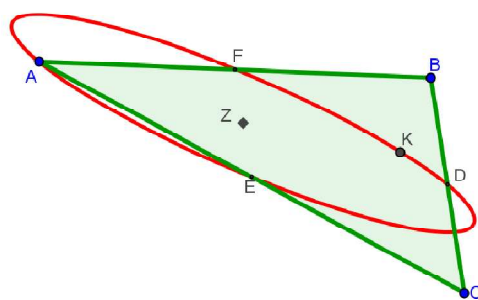
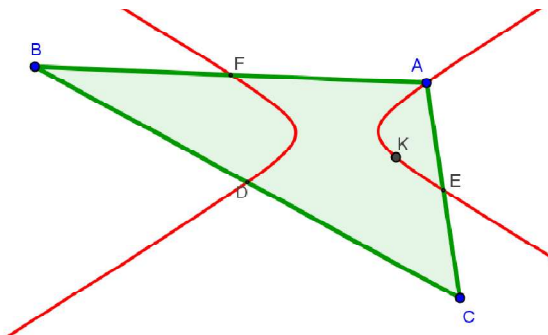
$$c \cdot \cos C (x + y - z)z - b \cdot \cos B (x - y + z)y = 0$$

Para hallar los puntos del infinito sustituimos z por $-x - y$.

Se obtiene $\left(\frac{x+y}{y}\right)^2 = -\frac{\beta}{\alpha}$; de aquí resulta $\frac{x}{y} = -1 \pm \sqrt{\frac{c \cdot \cos C}{b \cdot \cos B}}$, y tomando $y = b \cdot \cos B$ la expresión de los mismos es:

$$(x : y : -x - y) = (-b \cdot \cos B \pm \sqrt{bc \cos B \cdot \cos C} : b \cdot \cos B : -x - y)$$

Su existencia depende del signo $\Delta = bc \cos B \cdot \cos C$.



-Es una **hipérbola** siempre que se trate de un triángulo acutángulo o bien obtusángulo o rectángulo en A (aunque este último sea una hipérbola degenerada) pues el discriminante es positivo.

- Es una **elipse** cuando el discriminante es negativo: el triángulo es obtusángulo en B o en C .

-Es una **parábola** cuando el discriminante se anula: el ángulo B o el C (nunca el A) es recto. En cualquier caso, ya hemos visto que se obtiene un par de rectas: una cónica degenerada.

Y con esto concluimos. ■