Pr. Cabri 984

Enunciado

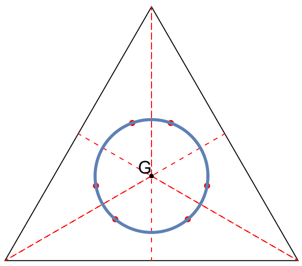
Dado un triángulo ABC de área S y tres números reales que suman la unidad, n1,n2,n3 los puntos del plano que forman con los vértices triángulos de áreas Sn1, Sn2, Sn3 son los puntos del plano de coordenadas baricéntricas absolutas (n1,n2,n3) y todas sus permutaciones. Probar que para cada terna n1,n2,n3 tales puntos están en una misma elipse cuyo centro es el baricentro del triángulo ABC.

Propuesto por Antonio Casas Pérez

Solución

de César Beade Franco

Dado que las transformaciones afines conservan las razones entre áreas, conservan también las coordenadas baricéntricas. Así que nos basta considerar un triángulo equilátero. Por simetría los 6 puntos del problema han de disponerse sobre una circunferencia concéntrica con la inscrita o la circunscrita, centrada en el baricentro tal como vemos en el dibujo.



El caso de otro triángulo y otro punto se puede obtener por una transformación afín del dibujo anterior. La circunferencia se transforma en una elipse homotética con las de Steiner y con centro el baricentro del triángulo.