

TRIÁNGULOS CABRI

Problema 984. (propuesto por Antonio Casas Pérez) Dados un triángulo ABC con área Δ y $n, m, k \in \mathbb{R}$ tales que $n + m + k = 1$, los puntos del plano que forman, juntos con los vértices del triángulo ABC , triángulos de áreas Δn , Δm y Δk son los puntos de coordenadas baricéntricas absolutas $(n : m : k)$ y todas sus permutaciones. Probar que, para cada terna $(n, m, k) \in \mathbb{R}^3$, tales puntos están en una misma elipse, cuyo centro es el baricentro G del triángulo ABC .

Solución:

Vamos a distinguir tres casos:

- ① Si $n = m = k = \frac{1}{3}$, tenemos un único punto, el baricentro $G = \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}\right) = (1 : 1 : 1)$ del triángulo ABC , por lo que basta con tomar la elipse degenerada en dicho punto.
- ② Si $n = m \neq k$ (para los casos $n = k \neq m$ y $n \neq m = k$ se razonaría de forma totalmente análoga), tenemos tres puntos:

$$\begin{cases} U = (1 - 2n : n : n) \\ V = (n : 1 - 2n : n) \\ W = (n : n : 1 - 2n) \end{cases} \quad \left(n \neq \frac{1}{3}\right)$$

que, junto con sus puntos respectivos puntos simétricos respecto del punto G :

$$\begin{cases} U' = (6n - 1 : 2 - 3n : 2 - 3n) \\ V' = (2 - 3n : 6n - 1 : 2 - 3n) \\ W' = (2 - 3n : 2 - 3n : 6n - 1) \end{cases}$$

determinan un hexágono $UV'WU'VW'$ tal que:

$$\begin{cases} UV'_{\infty} = (1 : 1 : -2) = VU'_{\infty} \\ VW'_{\infty} = (-2 : 1 : 1) = WV'_{\infty} \\ WU'_{\infty} = (1 : -2 : 1) = UW'_{\infty} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} UV' \parallel VU' \\ VW' \parallel WV' \\ WU' \parallel UW' \end{cases}$$

por lo que el recíproco del Teorema de Pascal nos asegura que dicho hexágono está inscrito en una cónica, cuya ecuación es:

$$n(3n - 2)(x^2 + y^2 + z^2) + (6n^2 - 4n + 1)(xy + xz + yz) = 0$$

y se trata de una elipse cuyo centro (conjugado de la recta del infinito) es el punto $G = (1 : 1 : 1)$, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 2n(3n - 2) & 6n^2 - 4n + 1 & 6n^2 - 4n + 1 \\ 6n^2 - 4n + 1 & 2n(3n - 2) & 6n^2 - 4n + 1 \\ 6n^2 - 4n + 1 & 6n^2 - 4n + 1 & 2n(3n - 2) \end{vmatrix} = 2(3n - 1)^2 \neq 0$$

y, además, su discriminante es:

$$\Delta = -\frac{3}{4} < 0$$

TRIÁNGULOS CABRI

Finalmente, cabe destacar que dos de estas elipses son la circunelipse de Steiner (que se obtiene para $n = 0$) y la inelipse de Steiner (que se obtiene para $n = \frac{1}{2}$). Además, como, para cada $n \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$, la elipse correspondiente corta a la mediana correspondiente al vértice A , cuya ecuación es $y - z = 0$, en los puntos:

$$\begin{cases} U = (1 - 2n : n : n) \\ U' = (6n - 1 : 2 - 3n : 2 - 3n) \end{cases}$$

y la inelipse de Steiner corta a dicha mediana en los puntos:

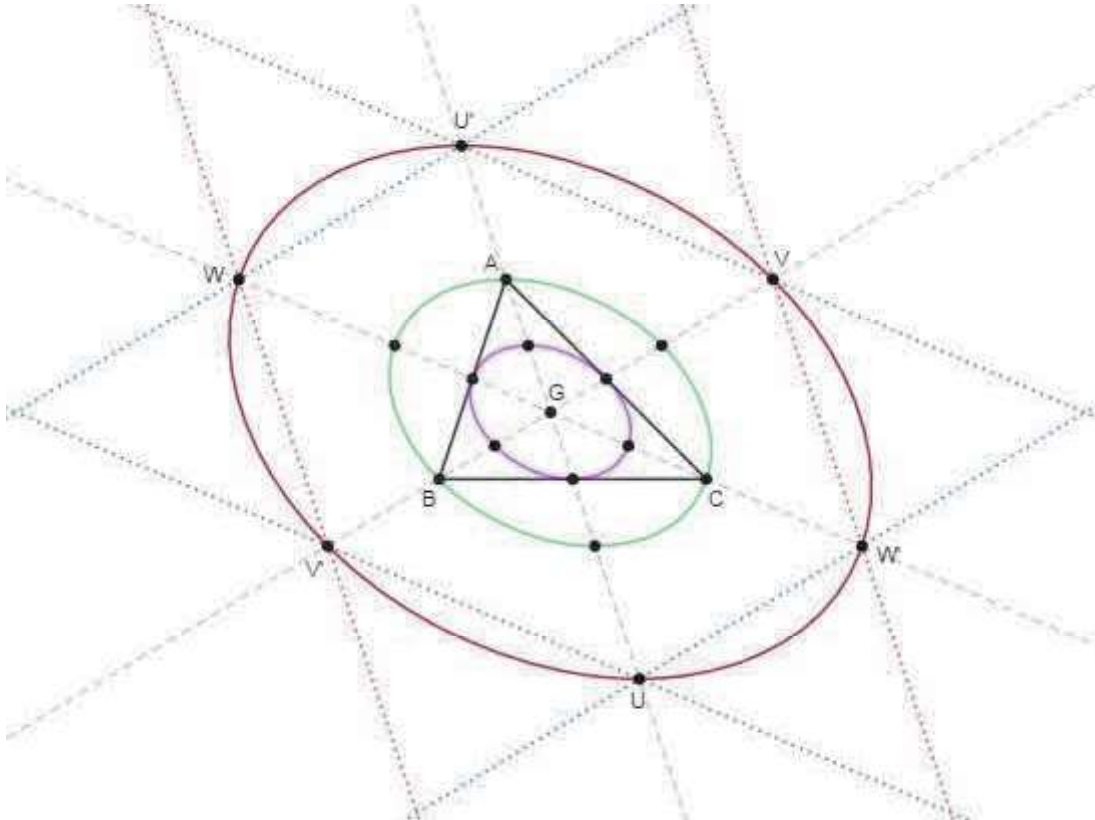
$$\begin{cases} A = (1 : 0 : 0) \\ M = (0 : 1 : 1) \end{cases}$$

siendo:

$$\frac{GU^2}{GM^2} = \frac{\left(\frac{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}{9} \right) (3n - 1)^2}{\frac{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}{36}} = 4(3n - 1)^2$$

entonces, ambas elipses son homotéticas con centro el punto G y razón:

$$k_n = \sqrt{4(3n - 1)^2} = 2|3n - 1|$$



TRIÁNGULOS CABRI

ya que, para cada $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, como la homotecia con centro en el punto G y razón h actúa de la siguiente manera:

$$(x : y : z) \rightarrow (x + y + z - h(-2x + y + z) : x + y + z - h(x - 2y + z) : x + y + z - h(x + y - 2z))$$

entonces, sustituyendo en la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0$$

obtenemos que, para cada $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la homotecia con centro en el punto G y razón h transforma la inelipse de Steiner del triángulo ABC en la elipse de ecuación:

$$(h^2 - 4)(x^2 + y^2 + z^2) + (2h^2 + 4)(xy + xz + yz) = 0$$

y, por tanto, para cada $n \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$, la homotecia con centro G y razón $k_n = 2|3n - 1|$ transforma la inelipse de Steiner del triángulo ABC en la elipse de ecuación:

$$n(3n - 2)(x^2 + y^2 + z^2) + (6n^2 - 4n + 1)(xy + xz + yz) = 0$$

③ Si $n \neq m \neq k \neq n$, tenemos seis puntos:

$$\begin{cases} P_1 = (n : m : k) \\ P_2 = (n : k : m) \\ P_3 = (m : n : k) \\ P_4 = (m : k : n) \\ P_5 = (k : n : m) \\ P_6 = (k : m : n) \end{cases}$$

que determinan un hexágono, de forma que:

$$\begin{cases} P_1P_6^\infty = (-1 : 0 : 1) = P_3P_5^\infty \\ P_6P_4^\infty = (-1 : 1 : 0) = P_5P_2^\infty \\ P_4P_3^\infty = (0 : 1 : -1) = P_2P_1^\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1P_6 \parallel AC \parallel P_3P_5 \\ P_6P_4 \parallel AB \parallel P_5P_2 \\ P_4P_3 \parallel BC \parallel P_2P_1 \end{cases}$$

por lo que el recíproco del Teorema de Pascal nos asegura que dicho hexágono está inscrito en una cónica, cuya ecuación es:

$$(nm + nk + mk)(x^2 + y^2 + z^2) - (n^2 + m^2 + k^2)(xy + xz + yz) = 0$$

y se trata de una elipse cuyo centro (conjugado de la recta del infinito) es el punto $G = (1 : 1 : 1)$, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 2(nm + nk + mk) & -(n^2 + m^2 + k^2) & -(n^2 + m^2 + k^2) \\ -(n^2 + m^2 + k^2) & 2(nm + nk + mk) & -(n^2 + m^2 + k^2) \\ -(n^2 + m^2 + k^2) & -(n^2 + m^2 + k^2) & 2(nm + nk + mk) \end{vmatrix} = -(n + m + k)^4 [(n - m)^2 + (n - k)^2 + (m - l)^2] \\ = -[(n - m)^2 + (n - k)^2 + (m - l)^2] \\ \neq 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

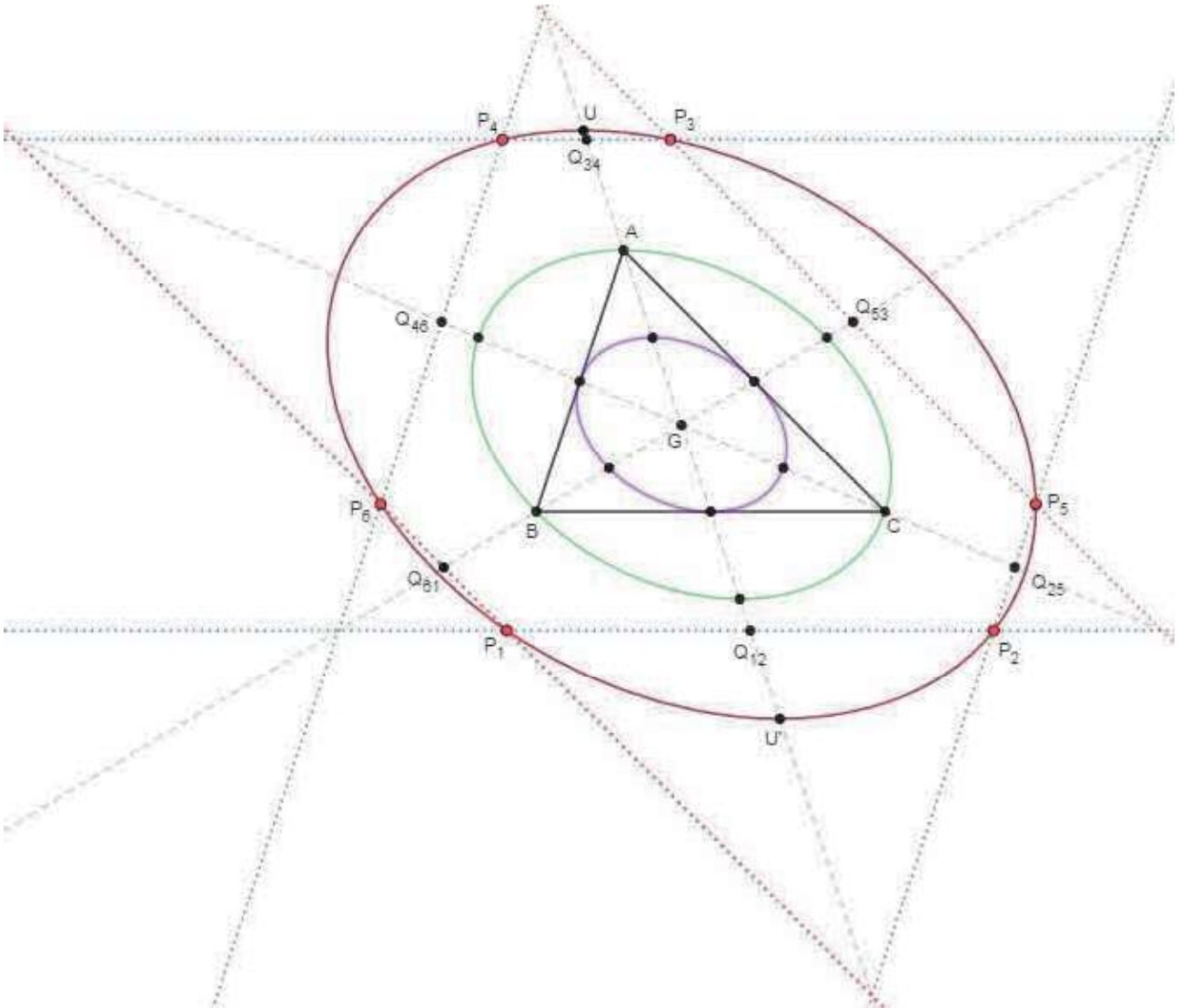
y, además, su discriminante es:

$$\Delta = -\frac{3}{4}(n+m+k)^4 = -\frac{3}{4} < 0$$

Además, como los puntos medios de los segmentos P_1P_2 , P_2P_5 , P_5P_3 , P_3P_4 , P_4P_6 y P_6P_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{12} = (2n : m+k : m+k) \\ Q_{25} = (n+k : n+k : 2m) \\ Q_{53} = (m+k : 2n : m+k) \\ Q_{34} = (2m : n+k : n+k) \\ Q_{46} = (m+k : m+k : 2n) \\ Q_{61} = (n+k : 2m : n+k) \end{array} \right.$$

están situados sobre las medianas del triángulo ABC , es fácil representar gráficamente esta situación:



TRIÁNGULOS CABRI

Finalmente, como los puntos de intersección entre esta elipse y los lados del triángulo ABC son:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = (0 : n + m + k - \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - 2nm - 2nk - 2mk} : n + m + k + \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - 2nm - 2nk - 2mk}) \\ X_2 = (0 : n + m + k + \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - 2nm - 2nk - 2mk} : n + m + k - \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - 2nm - 2nk - 2mk}) \\ Y_1 = (n + m + k - \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - 2nm - 2nk - 2mk} : 0 : n + m + k + \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - 2nm - 2nk - 2mk}) \\ Y_2 = (n + m + k + \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - 2nm - 2nk - 2mk} : 0 : n + m + k - \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - 2nm - 2nk - 2mk}) \\ Z_1 = (n + m + k - \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - 2nm - 2nk - 2mk} : n + m + k + \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - 2nm - 2nk - 2mk} : 0) \\ Z_2 = (n + m + k + \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - 2nm - 2nk - 2mk} : n + m + k - \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - 2nm - 2nk - 2mk} : 0) \end{array} \right.$$

resulta que:

☺ Si el punto $(n : m : k)$ está situado sobre la inelipse de Steiner del triángulo ABC , entonces:

$$n^2 + m^2 + k^2 - 2nm - 2nk - 2mk = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_1 = X_2 = (0 : 1 : 1) \\ Y_1 = Y_2 = (1 : 0 : 1) \\ Z_1 = Z_2 = (1 : 1 : 0) \end{array} \right.$$

por lo que esta elipse es tangente a los lados del triángulo ABC en sus puntos medios y, por tanto, es la inelipse de Steiner de dicho triángulo.

☹ Si el punto $(n : m : k)$ está situado sobre la circunelipse de Steiner del triángulo ABC , entonces:

$$nm + nk + mk = 0 \Rightarrow \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - 2nm - 2nk - 2mk} = n + m + k \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} X_1 = (0 : 0 : 1) = C \\ X_2 = (0 : 1 : 0) = B \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} Y_1 = (0 : 0 : 1) = C \\ Y_2 = (1 : 0 : 0) = A \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} Z_1 = (0 : 1 : 0) = B \\ Z_2 = (1 : 0 : 0) = A \end{array} \right. \end{array} \right.$$

por lo que esta elipse corta a los lados del triángulo ABC en los vértices de éste y, por tanto, es la circunelipse de Steiner de dicho triángulo.

y, además, como esta elipse corta a la mediana correspondiente al vértice A , cuya ecuación es $y - z = 0$, en los puntos:

$$\left\{ \begin{array}{l} U = (n + m + k + 2\sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - nm - nk - mk} : n + m + k - \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - nm - nk - mk} : n + m + k - \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - nm - nk - mk}) \\ U' = (n + m + k - 2\sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - nm - nk - mk} : n + m + k + \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - nm - nk - mk} : n + m + k + \sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - nm - nk - mk}) \end{array} \right.$$

y la inelipse de Steiner corta a dicha mediana en los puntos:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = (1 : 0 : 0) \\ M = (0 : 1 : 1) \end{array} \right.$$

siendo:

$$\frac{GU^2}{GM^2} = \frac{\left(\frac{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}{9}\right)(n^2 + m^2 + k^2 - nm - nk - mk)}{\frac{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}{36}} = 4(n^2 + m^2 + k^2 - nm - nk - mk)$$

TRIÁNGULOS CABRI

entonces, ambas elipses son homotéticas con centro el punto G y razón:

$$k_n = \sqrt{4(n^2 + m^2 + k^2 - nm - nk - mk)} = 2\sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - nm - nk - mk}$$

ya que, para cada $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, como la homotecia con centro en el punto G y razón h actúa de la siguiente manera:

$$(x : y : z) \rightarrow (x + y + z - h(-2x + y + z) : x + y + z - h(x - 2y + z) : x + y + z - h(x + y - 2z))$$

entonces, sustituyendo en la ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0$$

obtenemos que, para cada $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la homotecia con centro en el punto G y razón h transforma la inelipse de Steiner del triángulo ABC en la elipse de ecuación:

$$(h^2 - 4)(x^2 + y^2 + z^2) + (2h^2 + 4)(xy + xz + yz) = 0$$

y, por tanto, para cada $(n, m, k) \in \mathbb{R}^3$ tales que $n \neq m \neq k \neq n$, la homotecia con centro G y razón $k_n = 2\sqrt{n^2 + m^2 + k^2 - nm - nk - mk}$ transforma la inelipse de Steiner del triángulo ABC en la elipse de ecuación:

$$(nm + nk + mk)(x^2 + y^2 + z^2) - (n^2 + m^2 + k^2)(xy + xz + yz) = 0$$