Quincena del 1 al 31 de marzo de 2021.

Propuesto por Antonio Casas Pérez, profesor jubilado del Departamento de Matemática Aplicada al Urbanismo, a la Edificación y al Medio Ambiente, Universidad Politécnica de Madrid.

***Problema* 984.-** *Dado un triángulo ABC de área S y tres números reales que suman la unidad, u, v, w los puntos del plano que forman con los vértices triángulos de áreas $S \cdot u, S \cdot v, S \cdot w$ son los puntos del plano de coordenadas baricéntricas absolutas (u, v, w) y todas sus permutaciones. Probar que para cada terna u, v, w tales puntos están en una misma elipse cuyo centro es el baricentro del triángulo ABC.*

Casas, A. (2021): Comunicación personal.

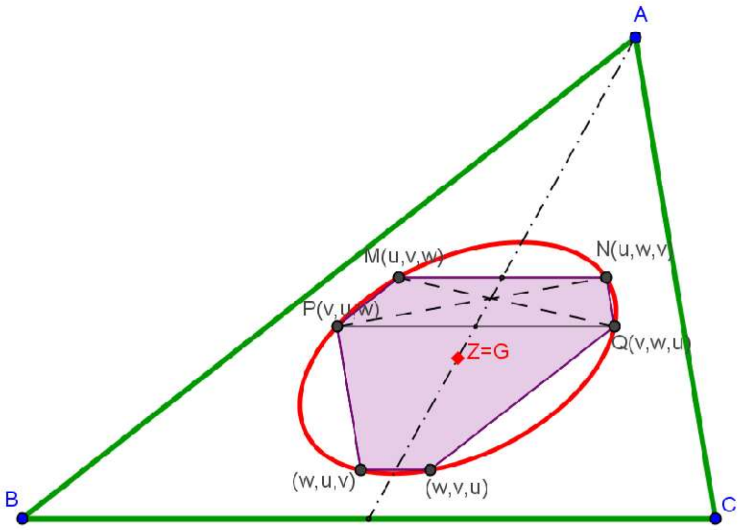
Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

De la definición de las coordenadas baricéntricas se deduce que las de un punto cualquiera son proporcionales a las áreas orientadas de los triángulos que forma éste con cada par de vértices del triángulo de referencia.

Denotando $[JKL] = Área\ (JKL)$ se tiene para el punto $P(u:v:w) = ([BCP]:\ [CAP]:[ABP])$; donde $[BCP] = \frac{u}{u+v+w}\ [ABC]$, y expresiones similares con los otros triángulos.

Por tanto, si las coordenadas son absolutas ($u + v + w = 1$), se tendrá $[BCP] = u[ABC] = u \cdot S$.

Si dos puntos P, Q comparten la primera de sus coordenadas, los triángulos BCP, BCQ tienen igual área y como también tienen una base común -el lado BC- están sobre una recta paralela a BC. También está sobre una recta paralela al lado AC (o AB) el par de puntos cuya primera coordenada es v (o w). De todo esto resulta que cada lado del hexágono que podemos formar con el punto (u, v, w) y sus permutaciones, es paralelo al lado opuesto. Según el teorema de Pascal, hay una cónica circunscrita a él.



Para determinar su centro observamos que el punto medio del segmento MN es $(2u: 1-u: 1-u)$ está sobre la mediana de a, la recta $y = z$ y también el punto medio del segmento paralelo PQ, que es $(2v: 1-v: 1-v)$. Por consiguiente la mediana de a es el eje conjugado con la dirección del lado $a = BC$.

Razonando de forma similar con otro cuadrilátero encontramos otro eje en otra de las medianas. En resumidas cuentas, que **el baricentro del triángulo es el centro de la cónica**.

Para determinar qué tipo de cónica es, escribimos su ecuación a partir de los datos. Se tiene

$$[x - w(x + y + z)][x - u(x + y + z)] - [(u + w)y - v(x + z)][(u + w)z - v(x + y)] = 0$$

Hacemos $z = -x - y$ para observar su comportamiento en el infinito y obtenemos:

$$x^2 - [(u + w) + v][(u + w) + v]yz = 0; x^2 + y(x + y) = 0;\ \boldsymbol{x^2 + xy + y^2 = 0}.$$

Y esa ecuación NO tiene soluciones reales, por tanto, se tiene una **elipse**.

(En la figura se ha tomado $(u,v,w)=\left(\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{1}{10}\right)$). ■