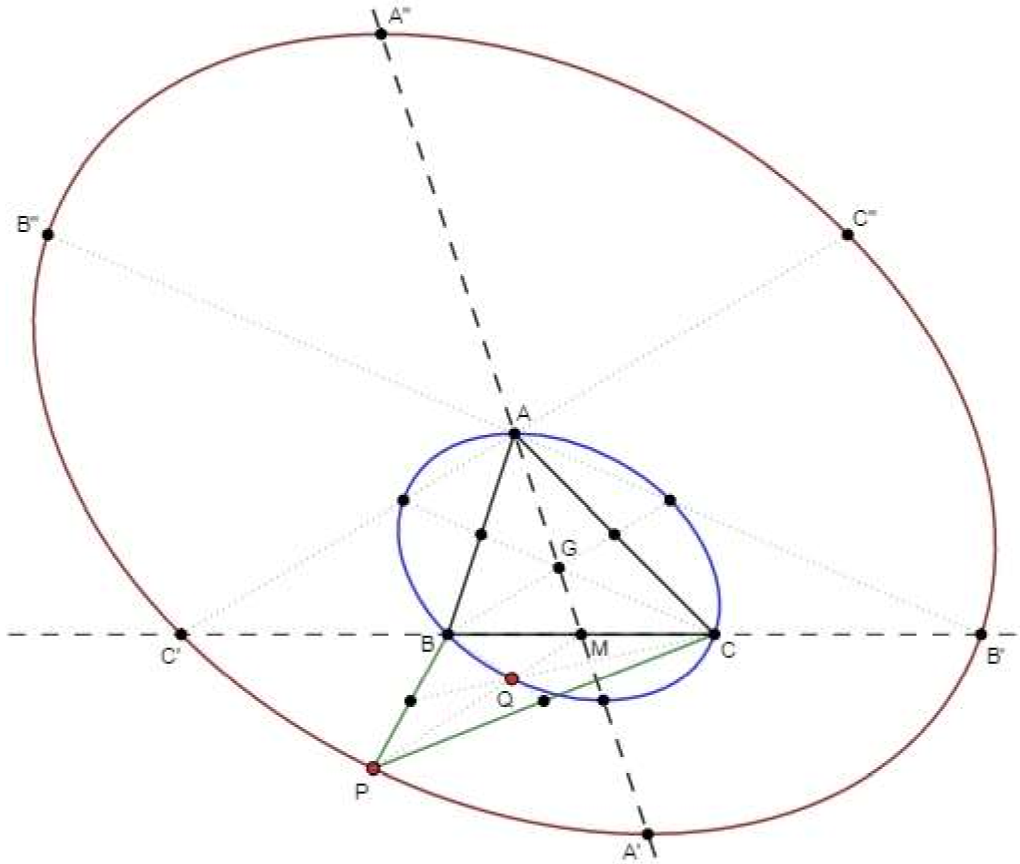
TRIÁNGULOS CABRI

Problema 985. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC, determinar el lugar geométrico que describe un punto P tal que el baricentro del triángulo BCP está situado sobre la circunelipse de Steiner del triángulo ABC.

Solución:



Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC, si $P = (u : v : w)$ $(u, v, w \in \mathbb{R})$, como el baricentro del triángulo BCP es:

$$Q = (u : u + 2v + w : u + v + 2w)$$

imponiendo que esté situado sobre la circunelipse de Steiner del triángulo ABC, cuya ecuación es:

$$xy + xz + yz = 0$$

obtenemos que:

$$3u^2 + 2v^2 + 2w^2 + 6uv + 6uw + 5vw = 0$$

lo cual significa que el punto Q está situado sobre la cónica de ecuación:

$$3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6xy + 6xz + 5yz = 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

que es una elipse con centro (conjugado de la recta del infinito) en el punto $A=(1:0:0)$, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$$

y su discriminante es $\Delta = -\frac{3}{4} < 0$. Además:

① Esta elipse corta a la recta BC, cuya ecuación es $x=0$, en el punto $B'=(0:-1:2)$ simétrico del punto B respecto del punto C y en el punto $C'=(0:2:-1)$ simétrico del punto C respecto del punto B, por lo que también pasa por los puntos B'' y C'' simétricos de los puntos B' y C' respecto del punto A.

② Esta elipse corta a la mediana correspondiente al vértice A del triángulo ABC, cuya ecuación es $y-z=0$ en el punto $A'=(-1:1:1)$ simétrico del punto A con respecto al punto medio M del segmento BC y en el punto $A''=(3:-1:-1)$ simétrico del punto A' con respecto al punto A.