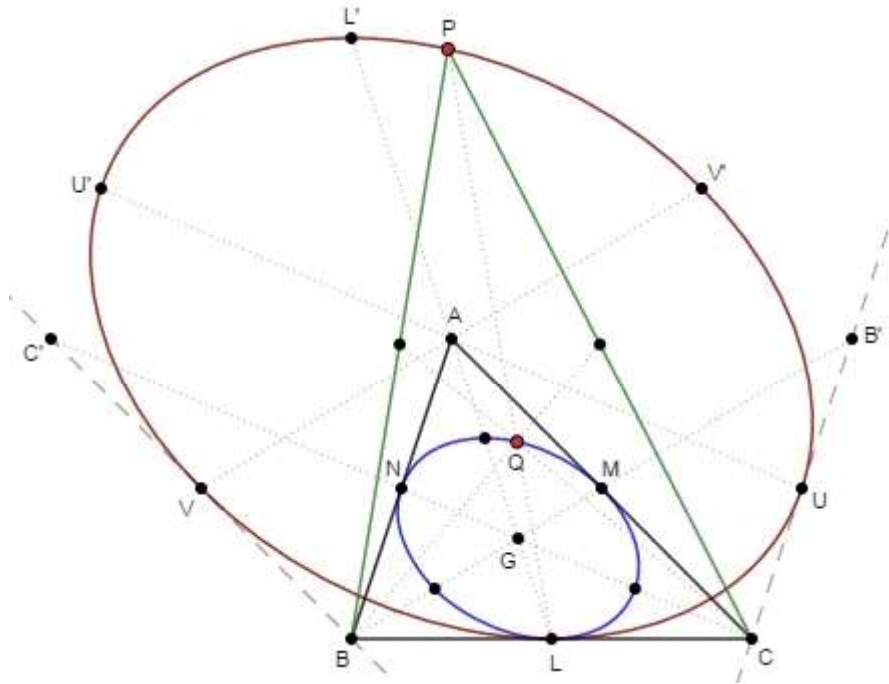


TRIÁNGULOS CABRI

Problema 986. (propuesto por Miguel-Ángel Pérez García-Ortega) Dado un triángulo ABC , determinar el lugar geométrico que describe un punto P tal que el baricentro del triángulo BCP está situado sobre la inelipse de Steiner del triángulo ABC .

Solución:



Considerando coordenadas baricéntricas con respecto al triángulo ABC , si $P = (u : v : w)$ ($u, v, w \in \mathbb{R}$), como el baricentro del triángulo BCP es:

$$Q = (u : u + 2v + w : u + v + 2w)$$

imponiendo que esté situado sobre la inelipse de Steiner del triángulo ABC , cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0$$

obtenemos que:

$$-3u^2 + v^2 + w^2 - 6uv - 6uw - 5vw = 0$$

lo cual significa que el punto Q está situado sobre la cónica de ecuación:

$$-3x^2 + y^2 + z^2 - 6xy - 6xz - 2yz = 0$$

que es una elipse con centro (conjugado de la recta del infinito) en el punto $A = (1 : 0 : 0)$, ya que es no degenerada, pues:

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -36 \neq 0$$

Miguel-Ángel Pérez García-Ortega

TRIÁNGULOS CABRI

y su discriminante es $\Delta = -12 < 0$. Además:

- ① Esta elipse es tangente a la recta BC , cuya ecuación es $x = 0$, en el punto medio $L = (0 : 1 : 1)$ del segmento BC , por lo que también pasa por el punto $L' = (4 : -1 : -1)$ simétrico del punto L respecto del punto A .
- ② Esta elipse es tangente a la recta paralela a AB pasando por el punto C , cuya ecuación es $x + y = 0$ en el punto medio $U = (1 : -1 : 2)$ del segmento cuyos extremos son el punto C y el punto $B' = (1 : -1 : 1)$ simétrico del punto B con respecto al punto medio $M = (1 : 0 : 1)$ del segmento AC , por lo que también pasa por el punto $U' = (3 : 1 : -2)$ simétrico del punto U con respecto al punto A .
- ③ Esta elipse es tangente a la recta paralela a AC pasando por el punto B , cuya ecuación es $x + z = 0$ en el punto medio $V = (1 : 2 : -1)$ del segmento cuyos extremos son el punto B y el punto $C' = (1 : 1 : -1)$ simétrico del punto C con respecto al punto medio $N = (1 : 1 : 0)$ del segmento AB , por lo que también pasa por el punto $V' = (3 : 1 : -2)$ simétrico del punto V con respecto al punto A .